

# FDTD 法による異方性媒質中の電磁界解析 (第3報)

松 永 繁 樹\*

## Analysis of Electromagnetic Fields in an Anisotropic Medium by a FDTD Method ( Part III )

Shigeki MATSUNAGA \*

**Abstract** – In this paper, a finite-difference time-domain (FDTD) method for solving two-dimensional electromagnetic field problems in a ferrite loaded waveguide is described. The method is applied to a ferrite boundary-value problem in a rectangular waveguide. The normalized input admittance at the air - ferrite interface in a waveguide is obtained by using a piecewise linear recursive convolution (PLRC) method. The numerical examples of normalized input admittance are compared with other theoretical values. It is shown that the FDTD method (PLRC method) is useful for the analysis of a ferrite loaded waveguide.

**Key words:** ferrite, waveguide, FDTD method

### 1. まえがき

EMC 対策に用いられるフェライトなどは一般に異方性が弱く、異方性は考慮されていない [1],[2] が、これまでジャイロトロピック異方性を示す異方性媒質 (磁化プラズマや磁化フェライトなど) 中の電磁界の数値解析を、FDTD 法 (有限差分時間領域法) を用いて行ってきた [3],[4]。FDTD 法は、複雑な代数計算を必要とせず、簡便で視覚化に優れた電磁界シミュレータとして最近よく用いられている [5],[6],[7]。異方性プラズマ中におけるダイポールアンテナの FDTD 解析なども報告されている [8]。媒質定数が周波数分散性を示すとき、電磁波の速度も周波数よって変化する。文献 [3] では、FDTD 法を用い、nondiagonal な磁化プラズマで満たされた平行板導波管内の線状磁流源からの電磁放射問題や、フェライトを含む方形導波管内不連続問題における管内電磁界を取り扱った。これらの異方性媒質は、一般に周波数分散性が強いことを考慮し、メモリ容量の点でも優れている Frequency-Dependent FDTD 法 ( $(FD)^2TD$  法) が有用であるが、さらに精度を向上させるため PLRC 法

(Piecewise Linear Recursive Convolution method) を用いた。文献 [4] では、FDTD 法による磁化プラズマで満たされた平行板導波管内の磁流源からの電磁放射問題や、フェライトを含む方形導波管内不連続問題の電磁界解析に PML 吸収境界条件を用いた。

これまでは主に電磁界分布を算出してきた。媒質定数が強い周波数分散性を示すとき、広帯域の周波数特性は FDTD 法の計算結果を単にフーリエ変換することによって求めることは難しい。本報では PLRC 法について若干の補足説明をし、crack wave [9] が発生しない場合について、フェライトを含む方形導波管内の不連続問題における入力アドミタンスの数値例を求めている。PLRC 法を用いて得られる電磁界の各瞬時値から定在波分布を求めることにより算出している。他の解析手法に基づく入力アドミタンスの値 [10] との比較から、PLRC 法による取り扱いが有用であることを示している。吸収境界条件としては Mur の二次吸収境界条件を用いた。FDTD 法を用いると実際の測定では困難が伴う、方形導波管内の空気とフェライト境界面近傍で発生する crack wave 等のシミュレーションが可能となる。

\* 釧路高専 一般教科 (兼 電気工学科)

## 2. 方形導波管内の空気-フェライト境界値問題

### 2.1 磁化フェライト

一般に用いられている記号法に従い、周波数領域においては時間因子を  $e^{j\omega t}$  としている。EMC 対策に用いられるスピネル形フェライトなどは一般に異方性が弱く、異方性は考慮されていない [1],[2] が、y 方向に飽和静磁界が印加された磁化フェライトの透磁率テンソルはジャイロトロピック異方性と周波数分散性を示し

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu} &= \mu_0 \boldsymbol{\mu}_r(\omega) \\ &= \mu_0 \begin{pmatrix} 1 + \chi_m(\omega) & 0 & j\kappa(\omega) \\ 0 & 1 & 0 \\ -j\kappa(\omega) & 0 & 1 + \chi_m(\omega) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1)$$

で与えられる。ただし

$$\chi_m(\omega) = \frac{(\omega_0 + j\omega\alpha)\omega_m}{(\omega_0 + j\omega\alpha)^2 - \omega^2} \quad (2-a)$$

$$\kappa(\omega) = \frac{-\omega\omega_m}{(\omega_0 + j\omega\alpha)^2 - \omega^2} \quad (2-b)$$

である。ここで、 $\alpha$  は減衰係数、 $\omega_0 = \gamma_m H_D$  は歳差角周波数である。また  $\gamma_m$  はジャイロトロピック係数、 $H_D$  は印加静磁界、 $\omega_m = 4\pi\gamma_m M_0$  であり、 $M_0$  は  $H_D$  による飽和静磁化である。透磁率テンソルが周波数分散性を示すので、電磁波の速度も周波数によって変化する。

### 2.2 磁化フェライト領域における PLRC 法

ここでは通常の Yee のアルゴリズムに基づき二次元の問題を取り扱う。周波数分散性が強い場合を考慮し、精度を向上させるため PLRC 法を用いて定式化した [4]。媒質定数が強い周波数分散性を示すとき、広帯域の周波数特性を FDTD 法の計算結果を単にフーリエ変換することによって求めることは難しい。

透磁率が周波数の関数式 (1) で与えられるとき、磁束密度  $B$  は透磁率と磁界  $H$  との畳み込み積分で与えられ、周波数領域表現式に対応し次式のような時間領域表現式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{B_x(t)}{\mu_0} &= H_x(t) + \int_0^t H_x(t-\tau)\chi_m(\tau)d\tau \\ &+ \int_0^t H_z(t-\tau)\kappa(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (3-a)$$

$$B_y(t) = \mu_0 H_y(t) \quad (3-b)$$

$$\frac{B_z(t)}{\mu_0} = H_z(t) + \int_0^t H_z(t-\tau)\chi_m(\tau)d\tau$$

$$- \int_0^t H_x(t-\tau)\kappa(\tau)d\tau \quad (3-c)$$

ただし、電気比感受率  $\chi_m(\tau)$ ,  $\kappa(\tau)$  は、各々  $\chi_m(\omega)$ ,  $\kappa(\omega)$  のフーリエ変換されたものを示す。式 (3) から分かるように、場所ごとに磁界の過去の値をすべて蓄えておく必要があるため、メモリ容量が膨大に必要となる。しかし、 $\mu(\omega)$  がある特殊な関数で表されるとき、式 (3) の畳み込み積分が帰納的に計算でき、必要なメモリ容量も少なくて済む。これは  $(FD)^2TD$  法、あるいは RC 法 (Recursive Convolution scheme 法) といわれるものであるが、 $(FD)^2TD$  法は、補助微分方程式法などの方法に比べて高速であり、メモリ容量の点でも優れているが、周波数分散性が強くなると精度が劣るといわれている。ここでは、 $t = n\Delta t$  とおき有限差分近似と、さらに周波数分散性が強いので PLRC 法を用いる。

$$\int_0^{n\Delta t} H_x(n\Delta t - \tau)\chi_m(\tau)d\tau \quad (4)$$

等の畳み込み積分を求めるとき、 $(FD)^2TD$  法では  $\Delta t$  内で  $H_x(t)$  が一定であると仮定するが、PLRC 法では、この部分を

$$H_x(t) = H_x^i + \frac{H_x^{i+1} - H_x^i}{\Delta t}(t - i\Delta t) \quad (5)$$

のように直線的に近似する。すなわち、各  $\Delta t$  内の  $H_x(t)$  をステップ近似から折れ線近似にすることにより精度が向上し、 $(FD)^2TD$  法と同程度の高速性を持つ。

帰納的に評価される磁界  $\hat{H}_x^n, \hat{H}_z^n$  については、既に定式化され、実数表現式が求められている [10]。電界  $E_y$  については、等方性の場合と同様であるので、電磁界の時間に関する定式化ができる。

空間に関しては Yee セルの割り当て位置に注意し定式化しなければならない。非対角要素  $j\kappa(\omega)$  があるので、y 成分以外の H の空間的配置と B のそれとが一致していない。文献 [3] の式 (24) に  $(x, z) = ((i + \frac{1}{2})\Delta x, j\Delta z)$  を代入すると右辺の  $H_x^{n-1}$  は Yee セル上に割り当てられているが、 $H_z^{n-1}, \Phi_{xz}^{n-1}, (\nabla \times \mathbf{E}^{n-\frac{1}{2}})_z$  等はこの位置には割り当てられていない。式 (25) についても  $(x, z) = (i\Delta x, (j + \frac{1}{2})\Delta z)$  を代入すると右辺の  $H_z^{n-1}$  は Yee セル上に割り当てられているが、 $H_x^{n-1}, \Phi_{xz}^{n-1}, (\nabla \times \mathbf{E}^{n-\frac{1}{2}})_x$  等はこの位置には割り当てられていない。このため例えば、 $H_z^{n-1}$  は図 1 のように、この周りの 4 つの磁界を用いて

$$\begin{aligned} H_z(i + \frac{1}{2}, j) &= \frac{1}{4} \left\{ H_z(i + 1, j + \frac{1}{2}) \right. \\ &+ H_z(i, j + \frac{1}{2}) + H_z(i + 1, j - \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

$$+ H_z(i, j - \frac{1}{2}) \} \quad (6)$$

と平均をとる。他も同様である。電界  $E_y$  については等方性の場合と同様に Yee セルを用いた空間に関する定式化ができる。

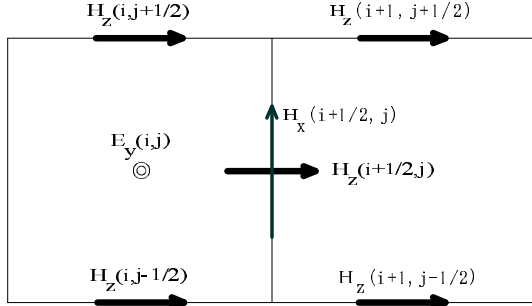


図 1: 磁界の空間的配置

### 3. 方形導波管内の空気-フェライト境界値問題

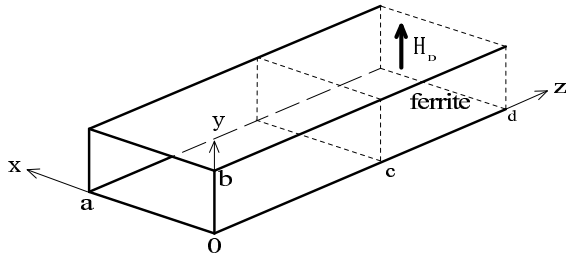


図 2: フェライトを含む方形導波管

図 2 に示すように  $y$  方向に飽和静磁界が印加された無損失フェライトが、方形導波管内の  $z \geq c$  領域に装荷され、 $y$  方向には電磁界の変化がない場合を考える。基本波のみが伝搬可能である場合について、空気領域より基本波が入射した場合の管内電界の各瞬時値を PLRC 法により求める。それより電界定在波分布を求め、フェライトを含む方形導波管内の不連続問題における正規化入力アドミタンスの値を算出する。不連続部で発生する高次モードの波は、不連続部の近傍に存在し、離れるに従い減衰する。図 3 は、比誘電率  $\epsilon_r = 2$ 、 $4\pi M_s = 2250[G]$ 、時刻(時間ステップ数)  $t = 15000\Delta t$  及び  $\epsilon_r = 3$ 、 $4\pi M_s = 1800[G]$ 、 $t = 25000\Delta t$  なる場合について、空気領域から基本波がフェライト領域に入射した場合の管軸方向の電界  $E_y$  分布 ( $x = a/2$ ) を求

めたものである。動作周波数  $10[GHz]$ 、 $a = 22.9[mm]$ 、 $H_D = 1000[Oe]$ 、セルサイズ  $\Delta x = \Delta z = 0.229[mm]$ 、時間ステップ  $\Delta t = 0.2 \times 10^{-12}[s]$  としている。 $z = 20\Delta z$  の位置に  $TE_{10}$  モードの励振源を仮定して、 $c = 350\Delta z$ 、 $d = 700\Delta z$  に選んでいる。また、管軸の両端 ( $z = 0$ ,  $d$ ) に Mur の 2 次吸収境界条件を設定し、均一ラテスを使用した。

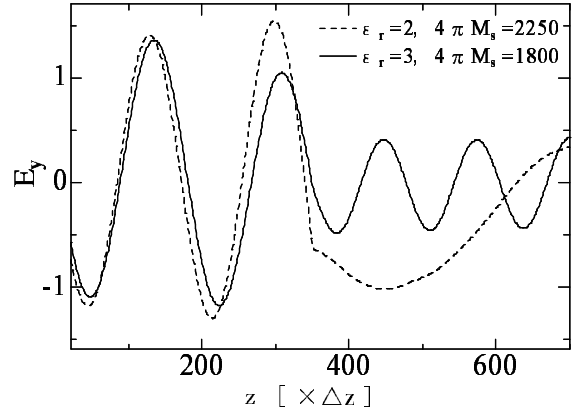


図 3: 方形導波管内管軸方向の電界分布 ( $x=a/2$ )

今回は、crack wave が存在しない場合について取り扱ったが、“crack wave” 現象は

$$\mu_{eff} = \frac{\mu^2 - \kappa^2}{\mu} \quad (7-a)$$

$$K = \frac{\pi}{a\omega} \left( \frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{\mu_{eff}} \right) \quad (7-b)$$

$$M = \frac{\pi \kappa}{a\omega \mu^2 - \kappa^2} \quad (7-c)$$

$$p = \frac{1}{2\pi j} \log \left( \frac{M+K}{M-K} \right) \quad (7-d)$$

とおくと、フェライト損失がなく

$$0 < \text{Re}p \leq \frac{1}{4} \quad \text{and} \quad \frac{3}{4} \leq \text{Re}p < 1 \quad (8)$$

なる条件を満たす場合に方形導波管内の空気-フェライト境界近傍で発生し [9]、等価回路網では表示されていない。フェライトは、磁化され磁氣的損失が無視できるとき、 $M$  と  $K$  は実数である。 $M < K$  であるとき、等価回路網で表示した場合の不連続面サセプタンス分は、境界面近傍で発生する歪んだ電磁界 (高次モードの波) に蓄えられるエネルギーに対応している。 $M > K$  であるときには excess junction アドミタンスはコンダクタンス分を持つことになり、フェライトが無損失であるとしても junction での損失分が生じることを示している。これは crack wave へエネルギーが変換 (損失) される

ために、この領域 ( $M > K$ ) において junction コンダクタンスがあらわれる。しかし、本報では  $M < K$  である場合について考え、空気領域及びフェライト領域において基本波のみが伝搬可能であると仮定している。実際にはフェライトの比誘電率はおよそ 10 以上の値を持つことが多く、フェライト領域において基本波のほかに高次モードの波も伝搬可能なことがある。本報では FDTD 法 (PLRC 法) による算出結果の妥当性を確かめるため比誘電率を任意の値に選んでいる。

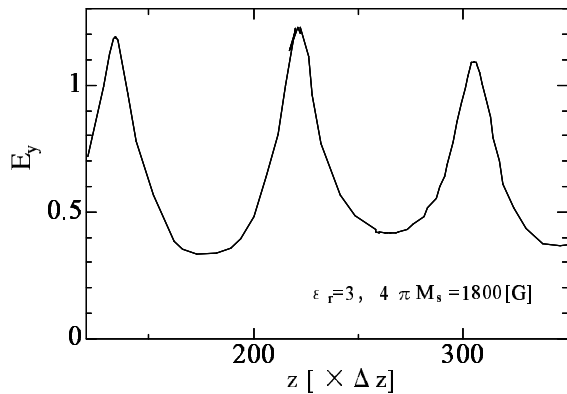


図 4: 方形導波管内空気領域の電界定在波分布 ( $x=a/2$ )

図 4 は、空気領域より基本波が入射した場合について、電界  $E_y$  の瞬時値から管軸方向の定在波分布を求めたものである。図 3 と同一条件で、 $\epsilon_r = 3$ ,  $4\pi M_s = 1800[G]$ 、時刻  $t = 24400\Delta t \sim 25100\Delta t$  における方形導波管内空気領域の電界定在波分布 ( $x=a/2$ ) を示している。

電界定在波分布が分かると、正規化入力アドミタンス  $y_{in}$  の値は、管内波長  $\lambda_g$  と電圧定在波比  $\rho$  及び電界最小点の位置  $l_{min}$  から次式で算出される。

$$y_{in} = \frac{\rho - j \tan(\beta l_{min})}{1 - j \rho \tan(\beta l_{min})} \quad (9-a)$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda_g} \quad (9-b)$$

準静的近似を用いた理論値及び境界要素法 (82 要素) に基づく値 [10] と併せ、時刻  $t \approx 14500\Delta t \sim 15100\Delta t$  における電界定在波分布からの平均をとり算出した正規化入力アドミタンスの数値例を表 1 に示した。

電磁界の瞬時値が十分に定常状態に達していないと、入力アドミタンス算出の誤差の原因となるが、不連続部の近傍に存在する高次モードの波も誤差の原因となる。表 1 の (ハ) は高次モードの波が発生しない等方性媒質の場合であり、FDTD 法により求めた定在波分布の算出結果に数%程度の誤差が生ずることもある [5] ので、

本法で得られたフェライトを含む場合の結果は、準静的近似理論式や境界要素法に基づく値と比較し、概ね妥当と思われる。差異の原因としては、不連続面からの高次モードの影響のほか、グリッド分散誤差、反射波の非対称性なども考えられるが、不均一ラテスや PML 吸収境界条件の採用についても検討の必要がある。

なお、方形導波管内の空気-フェライト境界値問題は古くから取り扱われており、等価回路網で表示した場合の空気領域とフェライト領域との境界面における不連続正規化リアクタンス  $X$  の近似理論式は、付録のように導かれている [10]。不連続リアクタンス  $X$  が求められると、正規化入力サセプタンスの近似理論値  $b_{in}$  は  $-1/X$  で与えられる。また、正規化入力コンダクタンスの理論値  $g_{in}$  は、空気領域及びフェライト領域の基本波の電流アドミタンスを  $Y_{10}^{(1)}$ ,  $Y_{10}^{(2)}$  とすると  $g_{in} = Y_{10}^{(2)} / Y_{10}^{(1)}$  で与えられる。

## 4. むすび

本報では PLRC 法について若干の補足説明をし、フェライトを含む方形導波管内の不連続問題における入力アドミタンスの数値例を求めた。空気領域から基本波が入射する場合について、空気領域内の電界の各瞬時値を PLRC 法を用いて求め、それより定在波分布と正規化入力アドミタンスの値を算出した。他の解析手法に基づく値との比較から、FDTD 法 (PLRC 法) による取り扱いが有用であることを示した。今回は取り扱いの妥当性に主眼をおき、crack wave が発生しない場合の方形導波管内の空気-フェライト境界値問題に限定した。FDTD 法を用いると実際の測定では困難が伴う、方形導波管内の空気とフェライト境界面の近傍で発生する crack wave 等のシミュレーションが可能となるので、計算精度の向上と併せ、今後検討していきたい。

## 参考文献

- [1] 田中元志, 曾根周作, 井上浩: “フェライトコア装着線路の周波数依存型 FDTD モデル”, 信学論 (B), vol.J86-B, no.1, pp.85-92, Jan. 2003.
- [2] 田中元志, チャカロタイ ジェドヴィスノブ, 井上浩: “フェライトの FD-FDTD モデル化における一手法”, 信学論 (C), vol.J86-C, no.9, pp.1030-1031, Sept. 2003.
- [3] 松永繁樹: “FDTD 法による異方性媒質中の電磁

表 1: 正規化入力アドミタンス ( $f=10[\text{GHz}]$ ,  $H_D=1000[\text{Oe}]$ ,  $a=22.9[\text{mm}]$ )

正規化入力アドミタンス $y_{in} = g_{in} + j b_{in}$	(イ) $\epsilon_r = 2.0$ $4\pi M_s = 2250[\text{G}]$	(ロ) $\epsilon_r = 3.0$ $4\pi M_s = 1800[\text{G}]$	(ハ) $\epsilon_r = 12.0$ $4\pi M_s = 0.0$
準静近似 補正項なし	1.05+j1.03	2.75+j0.21	4.50
準静近似 補正項 $\Delta_2$ のみ	1.05+j1.32	2.75+j0.48	4.50
準静近似 補正項 $\Delta_2$ と $\Delta_3$	1.05+j1.34	2.75+j0.50	4.50
境界要素法 (82 要素)	1.05+j1.18	2.77+j0.39	4.53+j0.00
FDTD 法 (PLRC 法)	1.02+j0.96	2.73+j0.34	4.55+j0.00

界解析”，釧路高専紀要 第 32 号，pp.19-23，Dec. 1998.

- [4] 松永繁樹：“FDTD 法による異方性媒質中の電磁界解析 (第 2 報)”，釧路高専紀要 第 33 号，pp.13-17，Dec. 1999.
- [5] 橋本修，阿部琢美：“FDTD 時間領域差分法入門”，森北出版，1996.
- [6] 宇野亨：“FDTD 法による電磁界およびアンテナ解析”，コロナ社，1998.
- [7] T.Itoh and Houshmand：“Time-Domain Methods for Microwave Structures: Analysis and Design”，New York, IEEE Press, 1998.
- [8] 陳強，佐藤弘康，澤谷邦男：“異方性プラズマ中におけるダイポールアンテナの FDTD 解析”，信学技報 A・P97-62，pp.25-28，July 1997.
- [9] L.Lewin：“Theory of Waveguides”，London, Newnes-Butterworths, 1975.
- [10] 松永繁樹：“境界要素法による異方性媒質中の電磁波の解析”，釧路高専紀要 第 20 号，pp.43-46，Dec. 1986.
- [11] L.Lewin：“A Ferrite Boundary-Value Problem in a Rectangular Waveguide”，IEE, no.3056 E, pp.559-563，Nov. 1959.

$$L_B = \Delta_2 \Delta_3 (L^2 + 1)(L^2 + 9)(L^4 - L^2 + 25) + 225 \Delta_3 (L^4 + 7L^2 + 9) + 225 \Delta_2 (L^2 + 1) \quad (11-b)$$

上式は，高次モードの伝搬定数に対して

$$\gamma_n^{(1)}, \gamma_n^{(2)} \cong \frac{n\pi}{a} \quad (n \geq 2) \quad (12)$$

なる準静的近似を用いた近似理論式に補正項を 1 項 ( $\Delta_2$ ) のみ導入した従来の第 2 次近似 [11] をさらにすすめ，補正項を 1 つ ( $\Delta_3$ ) 増やした近似理論式である [10]。

《 付 録 》

$$X = -\frac{1}{K} \left\{ 1 + \frac{1}{L^2} \frac{L_A}{(L^2 + 1)L_B/9 + 225} \right\} \quad (10)$$

ただし，

$$L_A = \Delta_2 \Delta_3 (L^2 + 1)^2 (L^2 + 9)(4L^4 + 26L^2 + 25) + 25 \Delta_3 (L^2 + 1)(4L^4 + 10L^2 + 9) + 225 \Delta_2 (L^2 + 1)^2 + 225 \quad (11-a)$$