スライディングモード制御による倒立振子のロバスト制御

池田　裕一* · 早苗　浩典** · 荒井 誠*

Robust Control of Inverted Pendulum by Sliding Mode Control Method

Yuichi IKEDA · Hironori SANAE · Makoto ARAI

Abstract – The system of inverted pendulum has the mechanism that enlarges the amplitude of the pendulum by rotating the pendulum supported to rotate on the horizontal arm right and left. This research aims at the development of the control system that maintains the inverted pendulum that was stand even right above to stable and disturbance attenuation by slinding mode control method. For the design of the control system is calculated by using MATLAB. The control program attempts the stabilization of the pendulum by using Simulink. The effectiveness of control law is verified by numerical simulations and experiments.
Key Words : Inverted pendulum, Robust control, Sliding mode control

1　はじめに

近年，機械システムは大規模化・複雑化してきており，このような機械システムを安定に動作させるには制御システムの設計が不可欠である．制御システムの設計には機械システムの運動方程式が必要になるが，得られる運動方程式は簡略化されたものであり，実際のシステムには様々な不確定要素が存在する．これらを無視して制御システムを設計すると，制御しているにも関わらず機械システムが不安定になることがあるため，不確定要素に対して頑健（ロバスト）な制御システムが求められる．ロバスト制御システムの設計方法には様々な手法が提案されており，その１つにスライディングモード制御がある [1)]．スライディングモード制御は制御系の構造を変える可変構造制御系の中で最も理論的に体系化されているものであり，優れたロバスト制御系が構成でき，モデルの不確かさ，パラメータ変動や外部からの外乱を積極的に取り扱えるといった特徴を持っている．この制御は制御入力によって制御対象の状態を設定した超平面に到達・拘束させ，その状態を平衡点に滑らせ原点に収束させることによって制御対象を漸近安定化させる手法である．さらに，マッチング条件と呼ばれる条件を満たしているならば，外乱などに対して不変であるという性質を有していることが知られており，ロバスト性に優れた制御手法である．本論文では，過去に本研究室で作成した倒立振子を対象とし，スライディングモード制御に基づいて倒立振子を安定化し，かつ外乱の影響を抑制する制御系の設計を目的とし，シミュレーションおよび実機実験を行いその有効性を検証する．

*釧路工業高等専門学校　機械工学科
**株式会社キッツ（平成 18 年度卒業生）

2　倒立振子の運動方程式

本研究では，Fig. 1 に示す回転型倒立振子を制御対象とする．Fig. 1 において，ϕ [rad] はアームの回転角度，θ [rad] は振子の回転角度，τ [Nm] はモータにより生成される制御トルク，w [Nm] はモータに加わる外乱トルクである．また，m [kg] を振子の質量，l [m] を振子の質量中心までの長さ，L [m] をアーム長さ，I [kgm^2] を振子の質量中心まわりの慣性モーメント，J [kgm^2] をアーム・モータの慣性モーメント，g [m/s^2] を重力加速度とする．この回転型倒立振子の運動方程式はつぎのように与えられる [2)]．

$$M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + g(q) = G(\tau + w). \qquad (1)$$

ただし，

$$q=\begin{bmatrix}\phi\\ \theta\end{bmatrix},$$

$$M(q)=\begin{bmatrix} J+I\sin^2\theta+mL^2+ml^2\sin^2\theta & -mlL\cos\theta \\ -mlL\cos\theta & (I+ml^2)\end{bmatrix},$$

$$C(q,\dot{q})=\begin{bmatrix} 2\dot{\theta}(I+ml^2)\sin\theta\cos\theta & \dot{\theta}mlL\sin\theta \\ -\dot{\phi}(I+ml^2)\sin\theta\cos\theta & 0\end{bmatrix},$$

$$g(q)=\begin{bmatrix}0\\ -mgl\sin\theta\end{bmatrix},\ G=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

である．

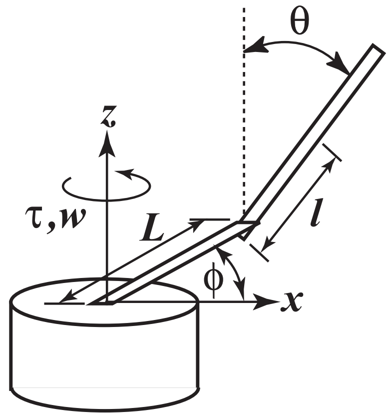

Fig. 1: Rotational inverted pendulum.

3　状態方程式の導出

本研究の制御目的は，

1. $w=0$ のとき，振子を倒立させアーム角度を 0 [rad] に保つこと，すなわち平衡点

$$\theta=0,\ \phi=0,\ \dot{\theta}=0,\ \dot{\phi}=0 \tag{2}$$

   を漸近安定化する

2. $w\neq 0$ のとき，アームと振子角度の偏差をできるだけ小さくする

ことである．ここでは，上記の 1. および 2. を達成する制御則を設計するための状態方程式を導出する．

はじめに，平衡点 (2) の近傍で (1) 式を線形化する．平衡点 (2) の近傍においては $\phi,\theta,\dot{\phi},\dot{\theta}$ は微小である．このとき，2 次以上の項は無視できるほど小さいこと，および $\sin\theta,\cos\theta$ の $\theta=0$ におけるテーラー展開から $\sin\theta\approx\theta,\cos\theta\approx 1$ となることより，(1) 式はつぎのように線形化される．

$$M_l\ddot{q}+K_lq=G(\tau+w). \tag{3}$$

ただし，

$$M_l=\begin{bmatrix}J+mL^2 & -mlL\\ -mlL & I+ml^2\end{bmatrix},$$

$$K_l=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & -mgl\end{bmatrix}$$

である．

つぎに，モータの制御トルクはモータに電圧を加えることにより発生するため，トルク入力 τ を電圧入力 V [V] に変換する．モータに加わる電圧 V とモータのトルク τ には次の関係がある．

$$\tau=K_gK_mi,\ i=\frac{V}{R}-\frac{K_gK_m}{R}\dot{\phi}. \tag{4}$$

ここで，i [A] はモータ電流，R [Ω] はモータコイル直流抵抗，K_m [A/(rad/s)] はモータトルク定数，K_g はギア比である．(4) 式より，(3) 式はつぎのようになる．

$$M_l\ddot{q}+D_l\dot{q}+K_lq=G_lV+Gw \tag{5}$$

ただし，

$$D_l=\begin{bmatrix}\frac{(K_gK_m)^2}{R} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ G_l=\begin{bmatrix}\frac{K_gK_m}{R}\\ 0\end{bmatrix}$$

である．(5) 式より，制御器設計のための状態方程式

$$\dot{x}=Ax+B_1u+B_2w \tag{6}$$

を得る．ただし，

$$x=\begin{bmatrix}q\\ \dot{q}\end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix}\mathbf{0}_{2\times 2} & E_2\\ -M_l^{-1}K_l & -M_l^{-1}D_l\end{bmatrix},$$

$$B_1=\begin{bmatrix}\mathbf{0}_{2\times 1}\\ M_l^{-1}G_l\end{bmatrix},\ B_2=\begin{bmatrix}\mathbf{0}_{2\times 1}\\ M_l^{-1}G\end{bmatrix},\ u=V,$$

$\mathbf{0}_{n\times m}$ は $n\times m$ 零行列，E_n は n 次の単位行列である．

4　スライディングモード制御

ここでは，$w=0$ のとき平衡点 (2) を漸近安定化するスライディングモード制御則の設計について述べる．

4.1　最適な切換超平面の設計

はじめに，(6) 式を変換する．(6) 式の入力行列 B_1 を

$$B_1 = [B_{11}^T\ B_{12}^T]^T,\ B_{11} \in \mathsf{R}^{3\times 1},\ B_{12} \in \mathsf{R} \tag{7}$$

のように表し，次の変換行列

$$T = \begin{bmatrix} E_3 & -B_{11}B_{12}^{-1} \\ \mathbf{0}_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

を用いて

$$x = T^{-1}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = T^{-1}z,\ z_1 \in \mathsf{R}^3,\ z_2 \in \mathsf{R} \tag{9}$$

のように，変数を変換すると (6) 式は

$$\dot{z} = \bar{A}z + \bar{B}_1 u \tag{10}$$

のように変換される．ただし，

$$\bar{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix},$$

$$\bar{B}_1 = TB_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3\times 1} \\ B_{12} \end{bmatrix}$$

である．

つぎに，この変換したシステム (10) 式に対して，スライディングモードになってからの状態の変動を最小にする最適な切換超平面を設計する．つぎの評価関数を導入する．

$$J = \int_{t_s}^{t} z^T Q z\ dt,\ Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{bmatrix} > 0. \tag{11}$$

ただし，$Q \in \mathsf{R}^{4\times 4}$ は重み行列，t_s は状態 z がスライディングモードを生じ始めたときの時刻である．このとき，(11) 式は

$$J = \int_{t_s}^{t} z_1^T Q_{11} z_1 + 2z_1^T Q_{12} z_2 + z_2^T Q_{22} z_2\ dt \tag{12}$$

と表せる．ここで，補助変数 v を

$$v = z_2 + Q_{22}^{-1} Q_{12}^T z_1 \tag{13}$$

とすれば，評価関数は

$$J = \int_{t_s}^{t} z_1^T Q_{11}^* z_1 + v^T Q_{22} v\ dt, \tag{14}$$
$$Q_{11}^* = Q_{11} - Q_{12}^T Q_{22}^{-1} Q_{12}$$

となる．このとき，z_1 に関する方程式は

$$\dot{z}_1 = \bar{A}_{11}^* z_1 + \bar{A}_{12} v,\ \bar{A}_{11}^* = \bar{A}_{11} - \bar{A}_{12} Q_{22}^{-1} Q_{12}^T \tag{15}$$

となる．(14)，(15) 式は最適制御問題 [3] の形をしており，最適な切換超平面の傾き S を求めるために，この最適制御問題を解く．評価関数 (14) を最小にする v はリカッチ方程式の解 P から

$$v = -Q_{22}^{-1} \bar{A}_{12}^T P z_1 \tag{16}$$

となり，(13) から

$$z_2 = v - Q_{22}^{-1} \bar{A}_{12}^T z_1 = -Q_{22}^{-1}(\bar{A}_{12}^T P + Q_{12}^T) z_1 \tag{17}$$

となる．切換超平面は $\sigma = [S_1\ S_2]z$ であるから，

$$S = [\bar{A}_{12}^T P + Q_{12}^T\ \ Q_{22}] \tag{18}$$

としてスライディングモードを生じさせると，評価関数を最小にする制御系を構成することができる．

4.2　スライディングモード制御則の設計

ここでは，スライディングモードを生じさせる，すなわち $\sigma = 0$ となる制御則の設計について述べる．制御則はつぎのリアプノフ関数

$$V = \frac{1}{2}\sigma^T \sigma \tag{19}$$

を用いて設計する．(19) 式の解軌道に沿った時間微分は

$$\dot{V} = \sigma^T \dot{\sigma} = \sigma^T (S\bar{A}z + S\bar{B}_1 u) \tag{20}$$

となる．ここで，制御側を

$$u = -(S\bar{B}_1)^{-1} S\bar{A}z - k\frac{\sigma}{\|\sigma\|},\ k > 0 \tag{21}$$

とすると，(20) 式は

$$\dot{V} = -kS\bar{B}_1 \frac{\sigma^T \sigma}{\|\sigma\|} \tag{22}$$

となる．ただし，k は設計パラメータである．(10)，(18) 式より $S\bar{B}_1 > 0$ であるから，$k > 0$ とすれば $\dot{V} < 0$ となり，$t \to \infty$ のとき $\sigma \to 0$ となる．さらに，$\sigma = Sz$，(17)，(18) 式より $t \to \infty$ のとき $z \to 0$，(9) 式より $x \to 0$ となることがわかる．したがって，制御則 (21) により平衡点 (2) が漸近安定になることがわかる．

5　スライディングモード制御による外乱抑制制御

ここでは，$w \neq 0$ のときアームと振子角度の偏差をできるだけ小さくする，外乱抑制型のスライディングモード制御則の設計について述べる．また，外乱 w について以下を仮定する．

仮定 1 外乱 $w(t)$ に対して，正の連続関数 $\kappa(t)$ が存在し $|w(t)| \leq \kappa(t)$ を満たす．

5.1　マッチング条件

次の不確かさを含むシステム

$$\dot{x} = Ax + Bu + f(x,t) \tag{23}$$

を考える．ただし，$x \in \mathrm{R}^n$，$u \in \mathrm{R}^m$ とする．ここで，以下の仮定をおく．

1) $f(x,t)$ は連続関数．
2) 関数 $E(x,t) \in \mathrm{R}^m$ が存在し $f(x,t) = BE(x,t)$ を満たす．
3) ある正の連続関数 $\rho(x,t)$ が存在し，集中的な不確かさ $h(x,t)$ に対して $\|h(x,t)\| \le \rho(x,t)$ を満たす．

2) を満たすとき，システム (23) はマッチング条件を満たすという [1]．以上の仮定により，(23) 式はつぎのようになる

$$\dot{x} = Ax + B\{u + h(x,t)\} \tag{24}$$

(6) 式において，$f(x,t) = B_2 w$ であり，

$$B_2 w = B_1\Big(\frac{R}{K_g K_m}\Big)w = B_1 E(t)$$

と表せることから，(6) 式はマッチング条件を満たすことがわかる．したがって，(6) 式は

$$\dot{x} = Ax + B_1\{u + E(t)\} = Ax + B_1\{u + h(t)\} \tag{25}$$

のように表される．また，仮定 1 より

$$|h(t)| = \Big|\Big(\frac{R}{K_g K_m}\Big)w\Big| \le \Big(\frac{R}{K_g K_m}\Big)\kappa(t) = \rho(t)$$

であり，3) を満たすことがわかる．

5.2　外乱抑制型制御則の設計

ここでは，(25) 式に対して，外乱抑制型制御則の設計を行う．超平面は 4.1 節で設計したものを用いる．制御則を

$$u = -(S\bar{B}_1)^{-1}S\bar{A}z - \bar{\rho}\frac{\sigma}{\|\sigma\|},\ \bar{\rho} > 0 \tag{26}$$

とする．$\bar{\rho}$ は設計パラメータであり，後で決定する．リアプノフ関数を

$$V = \frac{1}{2}\sigma^T\sigma \tag{27}$$

とする．(27) 式の解軌道に沿った時間微分は，$S\bar{B}_1$ がスカラであることから

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \sigma^T(S\bar{A}z + S\bar{B}_1 h(t) \\ &\quad -S\bar{B}_1(S\bar{B}_1)^{-1}SAz - \bar{\rho}S\bar{B}_1\frac{\sigma}{\|\sigma\|}) \\ &= \sigma^T(S\bar{B}_1 h(t) - \bar{\rho}S\bar{B}_1\frac{\sigma}{\|\sigma\|}) \\ &\le \rho(t)S\bar{B}_1\|\sigma\| - \bar{\rho}S\bar{B}_1\|\sigma\| \\ &= -(\bar{\rho} - \rho(t))S\bar{B}_1\|\sigma\| \end{aligned} \tag{28}$$

となる．したがって，$(\bar{\rho} - \rho(t))S\bar{B}_1 > 0$ となるように $\bar{\rho}$ の値を決めれば，$\dot{V} < 0$ となり，$\sigma \to 0$ となる．以降の証明は 4.2 節と同様なので省略する．

6　チャタリングの回避

制御則 (21)，および (26) の第 2 項は不連続な切換関数となっているが，実際のシステムでは，制御入力を急激に切り替えることはできない．また，このまま実際のシステムに適用するとチャタリングと呼ばれる激しい振動を起こしてしまい，アクチュエータが破損する危険性がある．そこで，実際のシステムに適用する場合には

$$\frac{\sigma}{\|\sigma\|} \to \frac{\sigma}{\|\sigma\| + \delta},\ \delta > 0 \tag{29}$$

として，関数を平滑化する．

7　シミュレーションおよび実験結果

ここでは，シミュレーションおよび実機実験によりスライディングモード制御の有効性を検証する．制御則は (26) 式を用いた．シミュレーションおよび実機実験において，モータ部のギアによるバックラッシなどの影響による偏差を取り除くため，状態変数としてアーム角度の積分項

$$\zeta = \int_0^t \phi(s)\ ds \tag{30}$$

を付加した以下の状態方程式

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}_1 u + \hat{B}_2 w,$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \zeta \\ q \\ \dot{q} \end{bmatrix},\ \hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{A}_{12} & \mathbf{0}_{1\times 2} \\ \mathbf{0}_{2\times 1} & \mathbf{0}_{2\times 2} & E_2 \\ \mathbf{0}_{2\times 1} & -M_l^{-1}K_l & -M_l^{-1}D_l \end{bmatrix},$$

$$\hat{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{0}_{2\times 1} \\ M_l^{-1}G_l \end{bmatrix},\ \hat{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{0}_{2\times 1} \\ M_l^{-1}G \end{bmatrix}$$

を基に，制御則の設計を行った．ただし，$\hat{A}_{12} = [1\ 0]$ である．また，評価関数 (11) の重み行列 Q を

$$Q = \mathrm{diag}\{0.05, 0.25, 4.00, 0.00, 1.00\}$$

とし，切換超平面 S を設計した．ただし，$\mathrm{diag}\{a, b, c, \ldots\}$ は対角要素を $a, b, c, \ldots$ とする対

角行列である．設計した切換超平面 S の値を以下に示す．

$$S = [-0.224 \quad -0.680 \quad 10.456 \quad -0.474 \quad 1.000].$$

なお，物理パラメータは文献 4) と同様に

$$m = 0.174,\ l = 0.5,\ L = 0.17,\ R = 2.6,\ J = 0.014$$
$$I = 0.0145,\ Km = 0.00767,\ Kg = 70,\ g = 9.8$$

とした．

7.1　シミュレーション結果

制御則 (26) において，設計パラメータを

$$k = 1,\ \bar{\rho} = 5,\ \delta = 0.1,$$

初期値を

$$\hat{x}(0) = [0 \quad 0 \quad 0.082 \quad 0 \quad 0]^T$$

とし，以下の外乱トルク

$$\begin{cases} w = 0, & 0 \le t < 20 \\ w = 0.5 \sin \frac{2\pi}{5} t, & t \ge 20 \text{ [s]} \end{cases}$$

を加えたときのシミュレーション結果を Fig. 2 に示す．Fig. 2 において左上がアーム角度 ϕ，右上が振子角度 θ，左下が入力電圧 V の時間応答である．ただし，ϕ，θ の単位は [deg.] である．Fig. 2 より，$w = 0$ のとき平衡点 (2) を漸近安定化していることがわかる．また，$w \neq 0$ のときの外乱抑制については，LQR 制御 3) を適用した場合と比較する．そのシミュレーション結果を Fig. 3 に示す．LQR 制御においては，評価関数

$$J_{lqr} = \int_0^t x^T Q_{lqr} x + u^T R_{lqr} u \ dt$$

の重み行列 Q_{lqr}，R_{lqr} を

$$Q_{lqr} = Q,\ R = 0.1 \tag{31}$$

とした．この値は制御入力の最大値がスライディングモード制御のそれと近い値となるように決定した．Fig. 2，3 から，スライディングモード制御の方が外乱の影響を抑制できていることがわかる．ただし，制御則 (26) において，不連続関数を平滑化により近似しているため，外乱の影響を完全に除去できていない．

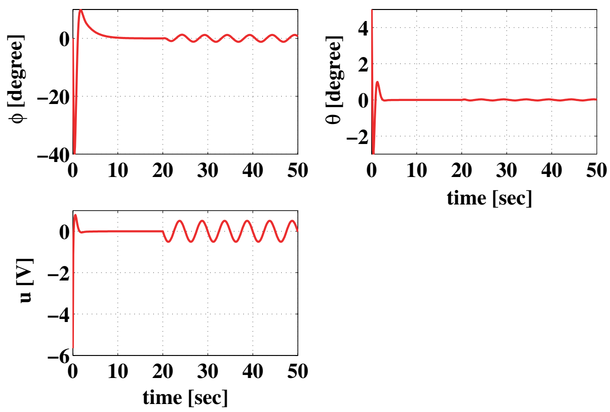

Fig. 2: Simulation results.

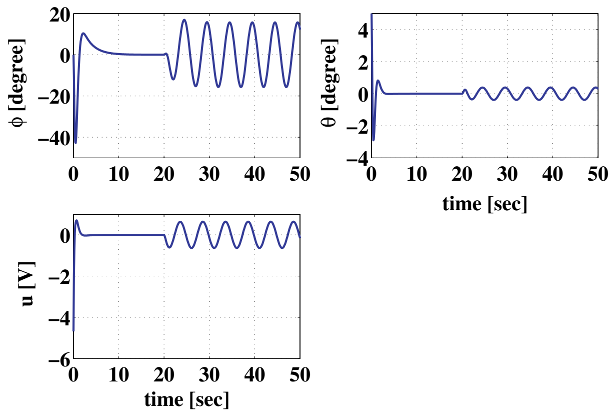

Fig. 3: Simulation results (LQR control).

7.2　実験結果

シミュレーションで設計した制御則を実装し，同様の条件で実機実験を行った．そのときの結果を Fig. 4 に，比較のための LQR 制御の結果を Fig. 5 に示す．ただし，実験ではアーム角速度 $\dot{\phi}$ と振子角速度 $\dot{\theta}$ は ϕ と θ の数値微分により求めているため，ノイズが混入しやすい．そのため，つぎのローパス・フィルタ

$$\frac{a_{lp} k_{lp} (s T_{lp1})}{(a_{lp} T_{lp1} s + 1)(T_{lp2} s + 1)}$$
$$a_{lp} = 0.1,\ k_{lp} = 10,\ T_{lp1} = T_{lp2} = 1$$

を挿入した．ローパス・フィルタのボード線図を Fig. 6 に示す．また，スライディングモード制御においては，実験機のモータの性能により $\delta = 0.5$ とした．Fig. 4, 5 より，アーム角度に関してはシミュレーションと同様にスライディングモード制御の方が外乱の影響を抑制できていることがわかる．しかし，振子角度に関しては，逆に LQR 制御の方が外乱の影響を抑制している．これは，スライディングモード制御では不連続関数を平滑化してはいるものの，本質的には制御入力の切換を行う制御であり，実験ではこれによる振動が発生したため，このような結果になったと考えられる．また，

シミュレーションと異なり平滑化のパラメータ δ を大きくしていることや，物理パラメータ誤差，ローパス・フィルタで除去し切れなかったノイズなどの影響も挙げられる．

8　おわりに

本論文では，スライディングモード制御による回転型倒立振子の安定化および外乱抑制制御を考え，シミュレーションおよび実機実験によりその有効性を確認した．

参考文献

1) 野波，田；スライディングモード制御–非線形ロバスト制御の設計理論–，コロナ社（1994）

2) 杉江，藤本;近似線形化を用いた倒立振子の制御，計測自動制御学会論文集，第 31 号，10 巻，pp.1643–1649（1998）

3) 浜田ほか：現代制御理論入門，コロナ社（1997）

4) 奥田　俊輔：MATLAB を利用した回転振上げ倒立振子の安定化制御，平成 17 年度釧路工業高等専門学校卒業論文（2005）

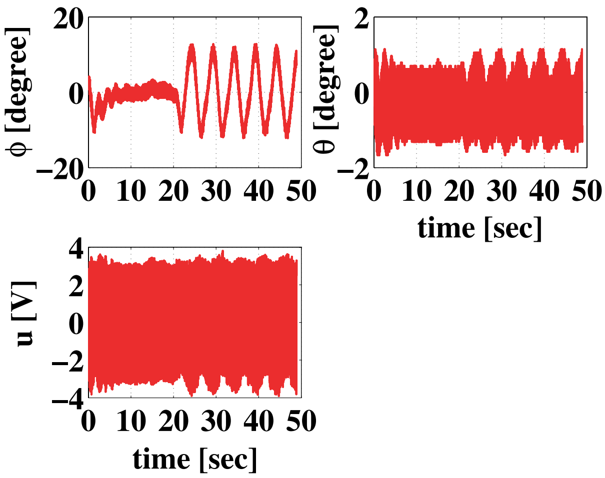

Fig. 4: Experimental results.

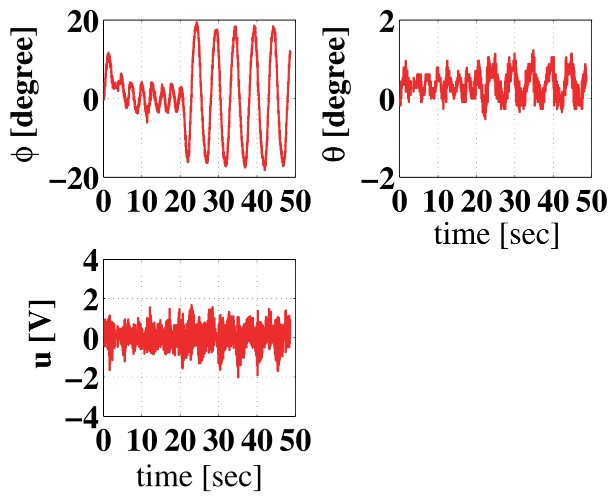

Fig. 5: Experimental results (LQR control).

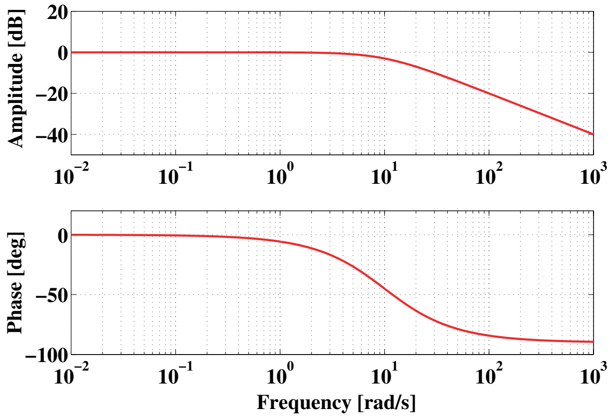

Fig. 6: Low-pass filter.