

連続体モデルの振動モード推定法について

Study on Estimation Method for Vibration Mode of Continuous Models

成澤 哲也*

Tetsuya NARISAWA

Abstract - It is very important problem to measure the elastic deformation of distributed parameter structures subjected to external force in vibrating conditions. In particular, for such as light-weight saving mechanical structures made of composite materials (FRP), this problem carries out great deal attentions. This report shows an approach that can be used to estimate full state vector of distribute system based on the Kalman optimal filter theory in the state space domain. Obtained results are as follows. 1)Optimal filter gain can be determined using the same computer algorithm for calculating the state feed-back gain. 2)The filter is inconvenient for observing state vector in unstable systems. 3)Natural frequencies and natural modes of objective model should be calculated before using the proposed estimation method.

Key Word: Optimal Observer, Kalman Filter, Vibration Mode, Distributed Parameter Models

1. はじめに

筆者はこれまで弾性変形を伴う機械構造を樹脂系繊維強化複合材料(FRP)を用いて軽量かつ最適な剛性を実現するための一連の研究を行ってきた¹⁾⁻³⁾。軽量化された構造はそのモデルに無限自由度の連続体モデルを用いるため、振動解析も一層複雑となってくる。また、系の低次元化を行うに当たっても高次の固有振動数や対応するモードの確定が必要である。さらに実在系では、一般にセンサの数より必要とする状態の数が多く全状態の観測が満たされることはないため、有限個のセンサ出力からより多くの状態を推定する機構が必要である。本報ではまず、最適アルゴリズムに基づくカルマンフィルタ理論を質点系振動モデルに適用し、出力フィードバックによって状態推定が可能なことを示す。次に、はりモデルを対象に本理論を応用し、連続体モデルに対する振動モードの推定が可能なことを示す。

2. 状態オブザーバによる振動モード推定法

2-1 最適定常カルマンフィルタの構成

入力信号に統計的性質をもつ雑音加わり、かつ出力信号に観測雑音が含まれる場合にはカルマンフィルタ型状態オブザーバが使われる。その場合、系は次の遷移状態システム方程式と観測方程式で表すことができる。

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) + v(t) \\ y(t) = cx(t) + w(t) \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 $u(t)$ は制御力でなく励振力とする。また、

$v(t)$ 、 $w(t)$ はそれぞれ入力に加わるシステム雑音および観測雑音のパワースペクトル密度であり、それぞれ互いに独立な正規分布(ガウス過程)にしたがう白色雑音である。このシステムに対し、雑音を有する観測出力 $y(t)$ から時刻 t における全状態 $x(t)$ の最良推定値 $\hat{x}(t)$ を求める。そのために、次の評価関数 J を最小とする推定機構を構成する($E\{\cdot\}$ は期待値作用素である)。

$$J = E\{[x(t) - \hat{x}(t)]^2\} \quad (2)$$

ここで、 (c, A) が可観測、 (A, b) が可制御であれば、 J の最小化は次のリカッチ方程式(Γ, Σ は v および w の共分散)。

$$AP(t) + P(t)A^T + \Gamma - P(t)c^T\Sigma^{-1}cP(t) = 0 \quad (3)$$

を解くことで得られる正(非負)定対称行列収束解 $P(t)$ から定められるカルマンフィルタゲイン L 、

$$L = P(t)c^T r^{-1} \quad (4)$$

の決定問題となる⁴⁾。また、 t で $P(t)$ が一定値をとるとき、Fig.1に示す定常カルマンフィルタを構成できる⁵⁾。オブザーバのゲインを大きくとり、極を複素左面の深い位置に配するほどノイズの影響がでるためカルマンフィルタは有効である⁶⁾。

よって、フィルタ方程式と推定誤差 $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ 方程式は以下となる。

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + bu(t) + L[y(t) - \hat{y}(t)] \\ \quad = [A - Lc]\hat{x}(t) + Ly(t) + bu(t) \\ \dot{e}(t) = [A - Lc]e(t) + v(t) - Lw(t) \end{cases} \quad (5)$$

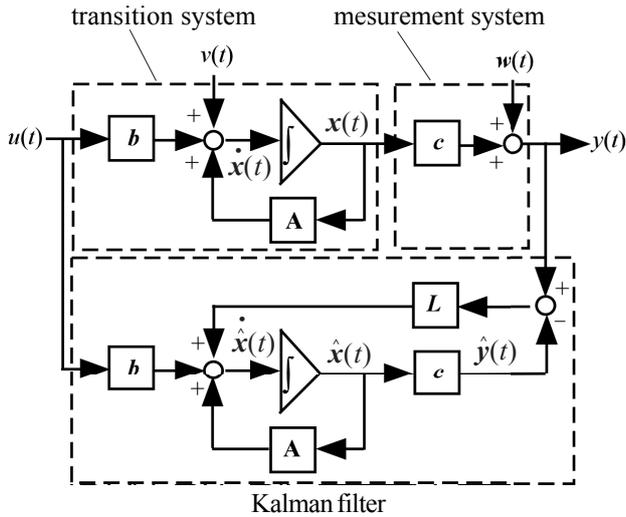


Fig.1 Full-observed steady-state Kalman filter configuration

さらに，推定値 $\hat{x}(t)$ と推定誤差 e は以下となる。

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \exp([A - Lc]t)\hat{x}(0) \\ \quad + \int_0^t \exp\{[A - Lc](t - \tau)\}(Ly(\tau) + bu(\tau))d\tau \\ e(t) = \exp([A - Lc]t)e(0) \\ \quad + \int_0^t \exp\{[A - Lc](t - \tau)\}(v(\tau) - Lw(\tau))d\tau \end{cases} \quad (6)$$

2 - 2 1 自由度系への適用

1 自由度系に適用した事例を以下に示す。

事例 1

【最適フィードバックゲイン K の計算】

議論の手始めとして，Fig.2 のような 1 自由度モデルを例に最適制御フィードバックゲイン K を計算する。

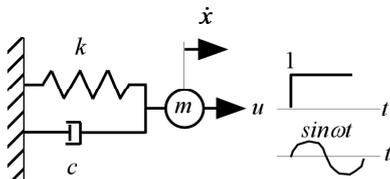


Fig.2 SDOF forced response model

ここで，状態変数を以下とし，

$$x(t) = \{x(t) \quad \dot{x}(t)\}^T \quad (7)$$

最適レギュレータ理論よる次の二次形式評価関数 J を最小とする制御力 $u(t)$ を与える K の決定問題とする⁷⁾。

$$J = \int_0^{\infty} [x(t)^T Q x(t) + r^2 u(t)^2] dt \quad (8)$$

ここで，パラメータ Q と r はそれぞれ振動エネルギーと制御エネルギーの重みである。この J を最小にする K は無限制御時間の場合以下で与えられる。

$$K = r^{-1} b^T P \quad (9)$$

式中の行列 P は以下に示すリカッチ型代数方程式の正定対称解である。

$$A^T P + PA + Q - P b r^{-1} b^T P = 0 \quad (10)$$

よってレギュレータは以下のようにになる。

$$\dot{x}(t) = [A - bK]x(t) \quad (11)$$

一例として， $m=1\text{kg}$ ， $k=2\text{N/m}$ ， $\zeta=1.06$ を与える。

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} u(t), \quad Q = 5I, r = 1 \quad (12)$$

Matlab コマンド：

```
A=[0 1;-2 -3]
b=[0;1]
I=eye(2)
% 振動エネルギー
Q=I*5
% 制御エネルギー
r=1
%Potter の方法
K=lqr(A,b,Q,r)
% レギュレータの極
e=eig(A-b*K)
```

計算結果：

```
>>K={1.000 1.000}
>>e={-1.0000 -3.0000}
```

事例 2

【定常カルマンフィルタゲイン L の計算】

同モデルに対して，変数間のカップリングをなくすため密度行列 Γ に単位行列 I の倍数を用いると，

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} u(t) + v(t) \\ y(t) &= \{0 \quad 1\} x(t) + w(t), \quad \Gamma = 5I, \Sigma = 1 \end{aligned} \quad (13)$$

事例 1 について，最適レギュレータとカルマンフィルタとの双対性から次の置き換えを行う⁸⁾。

$$A \quad A^T, \quad Q \quad \Gamma, \quad b \quad c^T, \quad r \quad \Sigma \quad (14)$$

また， P と Σ は対称行列のため，

$$L = P c^T \Sigma^{-1} = P^T c^T (\Sigma^{-1})^T = (\Sigma^{-1} c P)^T = (r^{-1} b^T P)^T = K^T \quad (15)$$

であるから， L は K を転置すればよい (K は行ベク

トル, L は列ベクトル)

Matlab コマンド:

```
A=[0 -2;1 -3]%AT
b=[0;1]%cT
I=eye(2)
% システム雑音
Q=I*5%Γ
% 観測雑音
r=1%Σ
% 最適制御ゲイン
K=lqr(A,b,Q,r)
% カルマンフィルタゲイン
L=K'%KT
% フィルタの極
e=eig(A-b*K)
```

計算結果:

```
>>
L = { -1.4495 } , e = { -2.0000 }
      { 1.4495 } ,      { 2.4495 }
```

事例 3

【定常カルマンフィルタゲイン L の計算】

Matlab(COPYRIGHT by The Math Works, Inc.)にはカルマンフィルタ設計用 lqe コマンドが用意されている⁹⁾。事例 2 の式 (12) を直接計算してみる。

Matlab コマンド:

```
A=[0 1;-2 -3]
G=eye(2)
c=[0 1]
I=eye(2)
% システム雑音
Q=I*5
% 観測雑音
r=1
% L: フィルターゲイン, P: リカッチ収束解
% e: フィルタの極
[L,P,e]=lqe(A,G,c,Q,r)
```

計算結果:

```
>>
L = { -1.4495 } , e = { -2.0000 }
      { 1.4495 } ,      { 2.4495 }
```

よって, フィルタは以下となる。

$$\dot{\hat{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 2.4495 \\ -2 & 2.4495 \end{bmatrix} \hat{x}(t) + \begin{bmatrix} 1.4495 \\ 1.4495 \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (t) \quad (16)$$

ここに, 単位ステップ入力の応答を速度にとる場合, 出力方程式は以下となる。

$$y(t) = \{0 \ 1\}x(t) \quad (17)$$

初期値 $\hat{x}(0)$ を与えた場合の収束状況が Fig.3 である。 $\hat{x}(t)$ が約 3 秒後に状態量 $x(t)$ に収束していることが分かる。初期値 $\hat{x}(0)$ にもよるが安定システムでは推定が速やかに行われている。

Fig.4 は調和励振入力の場合である。外力の振動数が系の固有振動数に近くなると減衰が存在しても, 時間とともに振幅は増大し不安定系となる¹⁰⁾。具体的に, $m=2\text{kg}$, $k=315.5\text{N/m}$, $\zeta=0.01$ を与えた

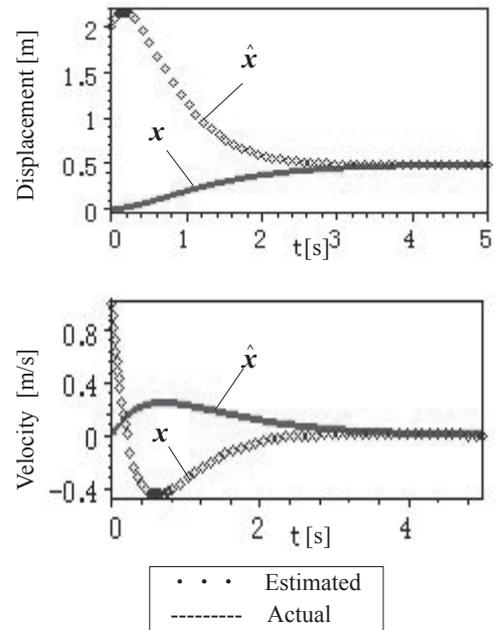


Fig.3 Convergence of state value estimation by unit step forced function (Example 3; $\hat{x}(0)=\{2 \ 1\}^T$, $c=\{0 \ 1\}$)

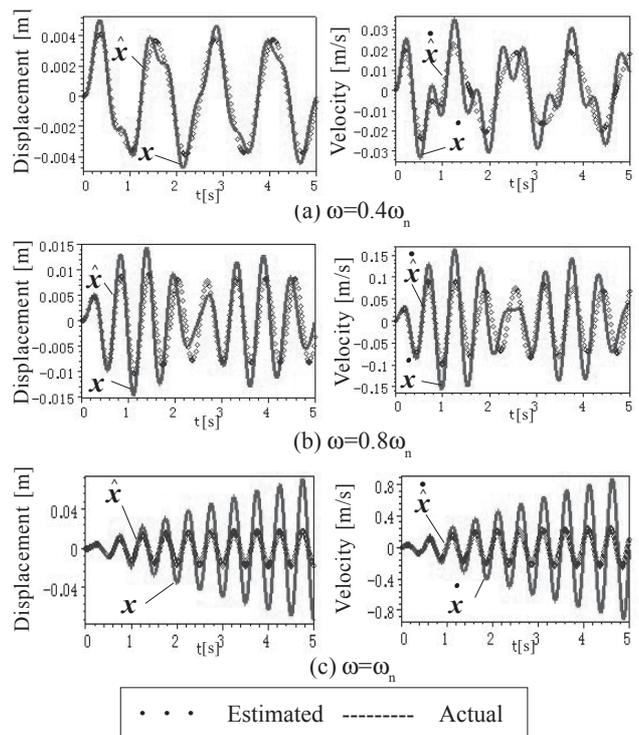


Fig.4 Convergence of state value estimation by harmonic forced function ($\hat{x}(0)=\{0 \ 0\}^T$, $c=\{1 \ 0\}$)

場合をみると、(a) $\omega=0.4\omega_n$ 、(b) $\omega=0.8\omega_n$ の場合には推定が速やかにできているが、(c) $\omega=\omega_n$ の場合には共振励振により推定値は実際値と大きくかけ離れる。このことから、不安定(非制御)系では収束しないことが確認できる。

2 - 3 2自由度質点系への適用

多自由度系の一例として、Fig.5に示すような減衰を有する2自由度質点系の単位ステップ応答を考える。

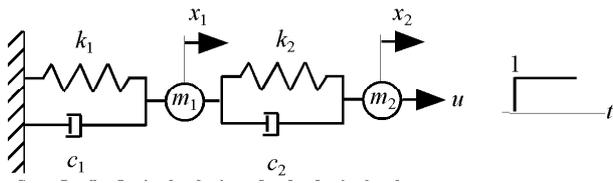


Fig.5 2DOF forced response model

Fig.6は、 $m_1=1\text{kg}$ 、 $m_2=2\text{kg}$ 、 $k_1=2000\text{N/m}$ 、 $k_2=1000\text{N/m}$ 、 $\zeta=0.01$ の結果であるが、2秒程度で収束しており、2自由度の場合でも状態推定が可能なことが理解できる。

3. はりの振動モード推定

はりモデルを対象に連続体の場合を検討する。

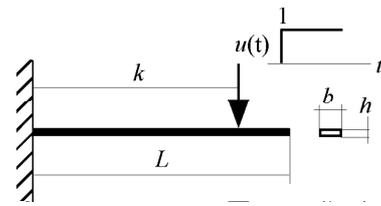


Fig.7 Beam model for state value estimation of continuous system

まず、はりの強制横振動は次式で与えられる。

$$\rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} = p(x,t) \quad (18)$$

ステップ励振力 $u(t)$ が $x=k$ の位置に働く場合、 $p(x,t)$ はデルタ関数を用いて次のように表せる。

$$p(x,t) = u(t)\delta(x-k) \quad (19)$$

また、変位 $w(x,t)$ を以下でモード展開する。 q_i 、 W_i はそれぞれ一般化座標と一般化変位である。また i は展開項数である。

$$w(x,t) = q_1(t)W_1(x) + q_2(t)W_2(x) \cdots q_i(t)W_i(x) \quad (20)$$

これを式(18)に代入、モードの直交性を適用した後にモード減衰を加えると離散化モード方程式を得る。

$$\ddot{q}_i(t) + 2\zeta_i \dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = \frac{U_i}{m_i}, \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (21)$$

ここで、 m_i 、 ζ_i 、 U_i はそれぞれモード質量、モード

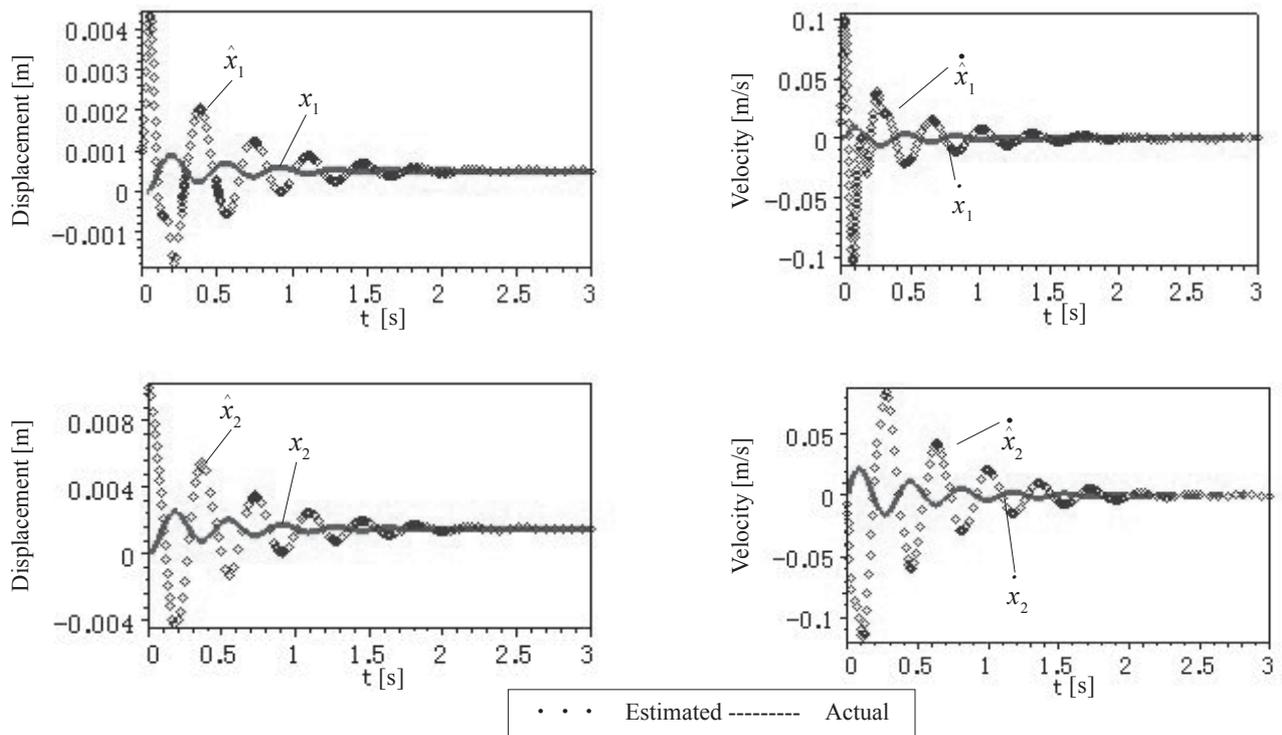


Fig.6 Convergence of state value estimation by unit step forced function ($\hat{x}(0)=\{0.001 \ 0.01 \ 0 \ 0\}^T$, $c=\{1 \ 0 \ 0 \ 0\}$)

減衰比,モード励振力行列であり,状態方程式表現すると以下のように表せる。

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t), \\ x(t) &= \begin{Bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{Bmatrix}, q(t) = \{q_1(t), \dots, q_n(t)\}^T, \\ A &= \begin{Bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{\Omega} & \mathbf{A} \end{Bmatrix}, \mathbf{\Omega} = \text{diag}(-\omega_1^2, \dots, -\omega_n^2), \\ \mathbf{A} &= \text{diag}(-2\zeta_1\omega_1, \dots, -2\zeta_n\omega_n), \omega_i = \sqrt{k_i/m_i}, \\ \mathbf{b} &= \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{\Phi} \end{Bmatrix}, \mathbf{\Phi} = \{U_1/m_1, \dots, U_n/m_n\}^T, U_i = W_i(k) \end{aligned} \quad (22)$$

具体例として3次システムを考える(付録参照)。片持ちはりに一つの集中外力が加わる場合について状態観測用のセンサー位置とモード形状の関係から状態推定の可能性について实际的に検討する。

系は可観測可制御が必要のため,モード形状から励振点と観測点を選定しなくてはならない。そこで, Fig.7 に示す固有モードを用いて次式のようなマップ関数を定義する。

$$\text{map}(x) = \prod_{i=1}^n W_i(x) \quad (23)$$

Fig.8 が 1 ~ 3 次までのマップ関数である。L をスパン長さとして, 図より, 不可制御不可観測点に

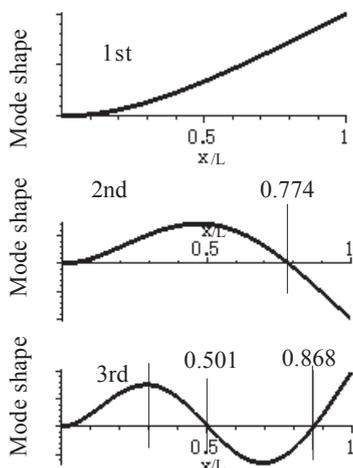


Fig.7 Eigen functions of beam model

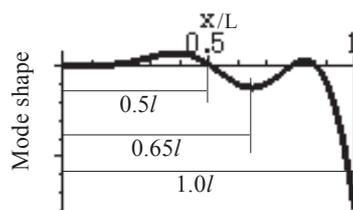


Fig.8 Map function of beam model

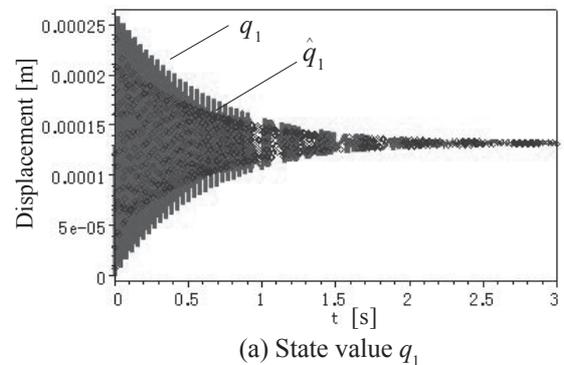
0.5L () 可観測可制御点として 0.65L () および 1.0L () を選ぶことができる。

具体例として, $E=206\text{GPa}$, $\rho=7850\text{Kg/m}^3$, $L=0.45\text{m}$, $b=25.4 \times 10^{-3}\text{m}$, $h=6.35 \times 10^{-3}\text{m}$ を与える。ここで, モード減衰 ζ は 0.01 とし, モード関数は以下で与えた。

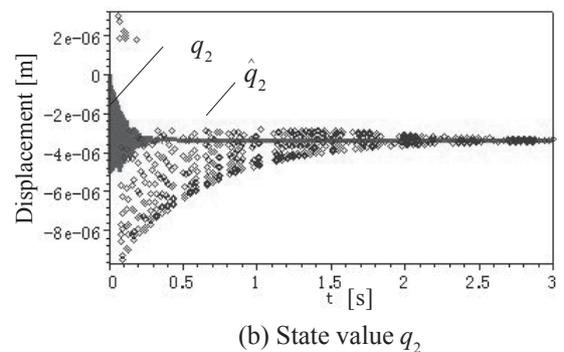
$$\begin{aligned} W_i(x) &= (\cosh \frac{\lambda_i}{l} x - \cos \frac{\lambda_i}{l} x) - \alpha_i (\sinh \frac{\lambda_i}{l} x - \sin \frac{\lambda_i}{l} x), \\ \alpha_i &= \frac{\sinh \lambda_i - \sin \lambda_i}{\cosh \lambda_i + \cos \lambda_i} \end{aligned} \quad (24)$$

$$(\lambda_1 = 1.875, \lambda_2 = 4.694, \lambda_3 = 7.855)$$

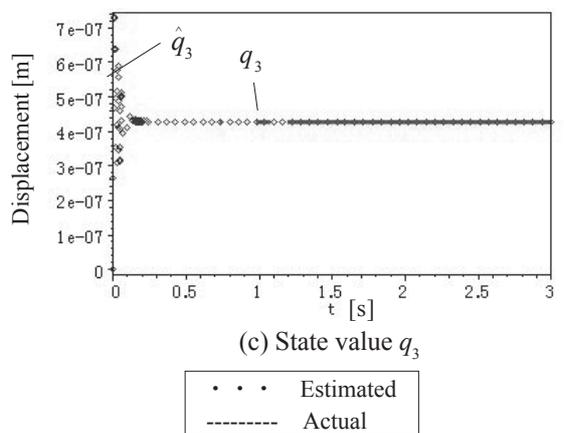
励振点と速度センサー配置点を自由端 として, 単位ステップ入力を与えた場合の状態推定を Fig.9



(a) State value q_1



(b) State value q_2



(c) State value q_3

• • • Estimated
----- Actual

Fig.9 Convergence of state value estimation by unit forced function ($\dot{x}(0)=\{0 \ 0\}^T$, $\{c\}=\{0 \ 0 \ 0 \ c_1 \ c_2 \ c_3\}$)

に示す。図(a)は \hat{q}_1 の遷移である。自由端の1次モードの最大値を与えるため最適センサー配置となり推定が速やかに行われている。反対に、図(b)の \hat{q}_2 については、収束までの時間が長くなっていることが分かる。また、図(c)の \hat{q}_3 についても初期誤差は大きいものの、比較的良好な推定機構を示している。よって、固有モード形状を確認した励振点、観測点の選定が必須となる。

次に、推定状態変数 $\hat{q}_1 \sim \hat{q}_3$ を用いて振動モードの推定を試みる。モードの推定には次式を用いる。

$$\text{shape}(x) = \hat{q}_1 W_1(x) + \hat{q}_2 W_2(x) + \hat{q}_3 W_3(x) \quad (25)$$

つまり、一般化変位 q_i はモード関数 ϕ_i に対する重みを意味するものである。Fig.9の結果を受けて時間経過によるモードの推定状況がFig.10である。推定開始から0.1秒後では約60%、1秒後には約30%の推定誤差であるが、3秒後には推定がほぼ完了している様子が確認できる。

推定時間の問題はあつたものの、連続体モデルについてもカルマンフィルタによる状態推定が可能であることが示された。

4. おわりに

現代は構造を強度や剛性のみで評価するのではなく、設計要求に応じて理想とする機能に合わせて

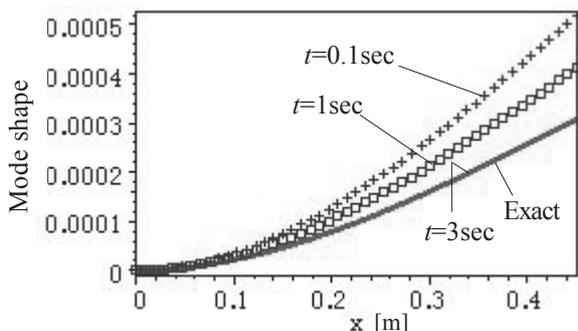


Fig.10 Result of vibration mode estimation for beam model

テーラリングする技術を必要とする時代である。これまでは、多変数系を単純モデルに置き換えることがエンジニアに求められる資質であった。しかし、異方性材料のように増えるパラメータを設計自由度として新しいシステム思考設計が求められている。本報では、連続体モデルについて状態変数と振動モードを推定する機構について論じた。

結論は以下である。

- 1) 最適理論に基づくカルマンフィルタゲインを最適レギュレータ問題に帰着させ、極配置を気にすることなくフィルタを構成することができた。
- 2) 調和励振周波数が系の固有振動数に一致する場合は減衰を有しても不安定となり、フィルタの構成は当然ながら不可能である。
- 3) 連続体モデルの振動モードの推定には、系の固有関数の確定が必要要件である。したがって、複雑な構造ではリッツ解法などによる固有振動数と固有モードの近似解析が前提となる。

参考文献

- (1) 成澤, 異方性平板・シェルの振動と制御, 釧路高専紀要, **38**, (2004), 7-13.
- (2) 成澤・山口・野村, 周辺単純支持された異方性偏平パネルの周波数応答と制御, 釧路高専紀要, **40**, (2006), 7-12.
- (3) 成澤・樋上, 実験モード解析を利用した複合材料シェルの積層パラメータ同定, 日本機械学会D&D2008講演会アブストラクト集, (2008), 63.
- (4) 岩井・井上・川路, オブザーバ, コロナ社, (1988).
- (5) A. Gelb., Applied Optimal Estimation., Massachusetts Ins. of Tech., (1974).
- (6) L. Meirovitch., Dynamics and Control of Structures., Wiley-Interscience Pub., (1989).
- (7) 土谷・江上, 現代制御工学, 産業図書, (1991).
- (8) 細江, システムと制御, オーム社, (1997).
- (9) 野波・西村・平田, 制御系設計, 東京電機大学出版局, (1998).
- (10) 齊藤, 工業振動学, 養賢堂, (1986).

付録 3次システム状態方程式の成分。

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \\ \dot{q}_3(t) \\ \ddot{q}_1(t) \\ \ddot{q}_2(t) \\ \ddot{q}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -\omega_1^2 & 0 \\ 0 & -\omega_2^2 \\ 0 & -\omega_3^2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -2\zeta_1\omega_1 & 0 \\ 0 & -2\zeta_2\omega_2 \\ 0 & -2\zeta_3\omega_3 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \\ \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \\ \dot{q}_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_1/m_1 \\ U_2/m_2 \\ U_3/m_3 \end{pmatrix} u(t)$$