平成１９年度国立高等専門学校学習到達度試験

数　　学　（９０分）

（注意事項）

1　試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。
（注意事項が裏表紙に続いていますので，問題冊子を開かずに裏返して，読んでください。）

2　この試験における各個人の識別は，学校・学科番号と個人番号で行います。試験実施にあたり在籍校から示された学校・学科番号と個人番号を次の欄に記入し，忘れないようにしてください。

学校・学科番号	個人番号

↑学校から示された学校・学科番号と個人番号を記入してください。

3　試験時間は９０分です。
試験中は退室を認めません。試験中の発病又はトイレ等やむを得ない場合には，手を挙げて監督者の指示に従ってください。

4　出題学習領域は次のとおりです。
各出題学習領域のうち，在籍校から，解答する必要のない旨の指示があった学習領域については解答する必要はありません。
なお，解答する必要のない学習領域について解答した場合には採点を行い，その結果を通知します。
また，解答すべき学習領域が分からない場合は手を挙げて監督者に申し出てください。

学習領域	配点	問題冊子	解答用紙
§１　数と式の計算	50	２頁～３頁	第１面
§２　方程式・不等式	50	４頁～５頁	
§３　関数とグラフ	50	６頁～７頁	
§４　場合の数と数列	50	８頁～９頁	
§５　平面ベクトルの性質	50	10頁～11頁	
§６　微分・積分の計算	50	12頁～13頁	第２面
§７　微分・積分の応用	50	14頁～15頁	
§８　空間ベクトル，行列の計算	50	16頁～17頁	
§９　行列の固有値と行列式	50	18頁～19頁	
§10　２変数関数の微分・積分	50	20頁～21頁	

（裏表紙に続く）

§1　数と式の計算

1 次の(1)から(4)の各文の ア 及び イ に当てはまる数を，解答欄にマークせよ。

(5×4＝20点)

(1) $\dfrac{(a^3b^2)^3}{(a^2b)^2}$ を簡単にすると，$a^{\boxed{ア}}\,b^{\boxed{イ}}$ である。

(2) $\dfrac{3+2i}{2-i}$ を簡単にすると，$\dfrac{4+\boxed{イ}\,i}{\boxed{ア}}$ である。ただし，i は虚数単位とする。

(3) 繁分数 $\dfrac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}}{1-\dfrac{1}{6}}$ を簡単にすると，$\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ア}}$ である。

(4) $x=\sqrt{3}+1$，$y=\sqrt{3}-1$ のとき x^2+xy の値は，$\boxed{ア}+\boxed{イ}\sqrt{3}$ である。

2 $\dfrac{3x}{x^2-x-2}$ を二つの分数式の和に直すと $\dfrac{\boxed{ア}}{x-2}+\dfrac{\boxed{イ}}{x+1}$ となる。ア 及び イ に当てはまる数を，解答欄にマークせよ。(10点)

3 次の①～⑥のうち，正しいものを二つ選び，その番号を解答欄 ア，イにそれぞれ一つずつマークせよ(順不同)。(5×2＝10点)

① $\sqrt{9}=\pm 3$

② $\sqrt{-2}\sqrt{-3}=\sqrt{6}$

③ $\dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=\dfrac{2}{3}$

④ $a>0$ のとき $\sqrt{(-a)^2}=a$

⑤ $x=2$ のとき $\dfrac{1}{x-2}=0$

⑥ $3x^4-2x^3+5x+1$ を $x+1$ で割った余りは 1 である

4　x^3+4x^2+x- ア を因数分解すると，$(x-1)(x+2)(x+$ イ $)$ となる。ア及びイに当てはまる数を，解答欄にマークせよ。(5×2=10点)

1 次の各問いに答えよ。

(1) 2次方程式 $3x^2-3x-1=0$ の解は $x=\dfrac{\boxed{イ}\pm\sqrt{\boxed{ウ}\boxed{エ}}}{\boxed{ア}}$ である。ア, イ, ウ, エに当てはまる数を，解答欄にマークせよ。(5点)

(2) 2次不等式 $x^2+5x-6\leqq 0$ の解を，次の①～⑨のうちから一つ選び，その番号を解答欄にマークせよ。(5点)

① $x\leqq 2,\ 3$	② $2\leqq x\leqq 3$	③ $x\leqq 2,\ 3\leqq x$
④ $x\leqq 1,\ -6$	⑤ $-6\leqq x\leqq 1$	⑥ $x\leqq -6,\ 1\leqq x$
⑦ $x\leqq -1,\ 6$	⑧ $-1\leqq x\leqq 6$	⑨ $x\leqq -1,\ 6\leqq x$

(3) 方程式 $\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ の解は $\theta=\boxed{ア}$, $\boxed{イ}$ である。ア, イに当てはまる数を，次の①～⑨のうちからそれぞれ一つずつ選び，その番号を解答欄にマークせよ(順不同)。(5×2=10点)

① $\dfrac{\pi}{6}$	② $\dfrac{\pi}{4}$	③ $\dfrac{2}{3}\pi$
④ $\dfrac{5}{6}\pi$	⑤ $\dfrac{7}{6}\pi$	⑥ $\dfrac{5}{4}\pi$
⑦ $\dfrac{4}{3}\pi$	⑧ $\dfrac{5}{3}\pi$	⑨ $\dfrac{11}{6}\pi$

2 次の①～⑦の方程式の中で異なる実数解をちょうど2個持つものが二つある。その番号を解答欄ア，イにそれぞれ一つずつマークせよ（順不同)。(5×2=10点)

① $x^2+x+1=0$	② $x^2-4x+5=0$
③ $2x^2-5x-3=0$	④ $-4x^2+12x-9=0$
⑤ $x^3+1=0$	⑥ $x^3+3x^2=0$
⑦ $x^3+4x=0$	

3 次の各問いに答えよ。(5×2=10点)

(1) 分数方程式 $\dfrac{x+1}{x-1} = 2x-1$ の解は $x = 0$ と $x =$□である。□に当てはまる数を解答欄にマークせよ。

(2) 無理方程式 $\sqrt{x+1} = x-5$ の解は $x =$□である。□に当てはまる数を解答欄にマークせよ。

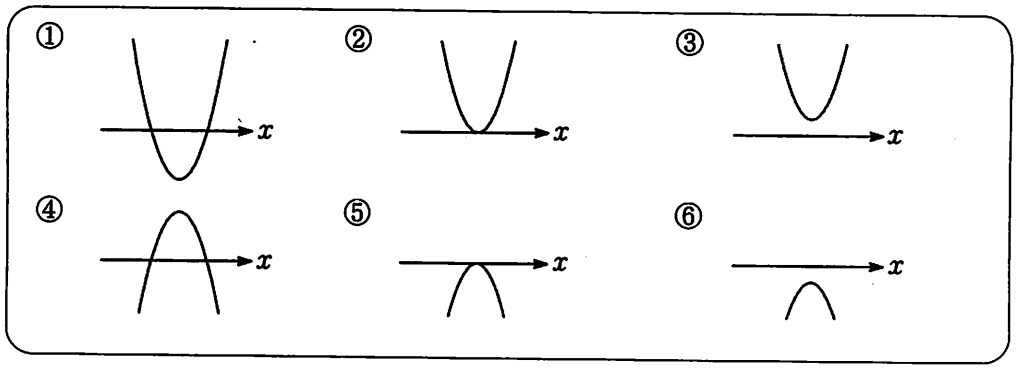
4 2次不等式 $2x^2-6x+a > 0$ がすべての実数 x について成り立つための必要十分条件は次のどれか。①～⑧のうちから一つ選び，その番号を解答欄にマークせよ。(10点)

① $a < 0$	② $a < 3$	③ $a < \dfrac{9}{2}$	④ $a < 18$
⑤ $a > 0$	⑥ $a > 3$	⑦ $a > \dfrac{9}{2}$	⑧ $a > 18$

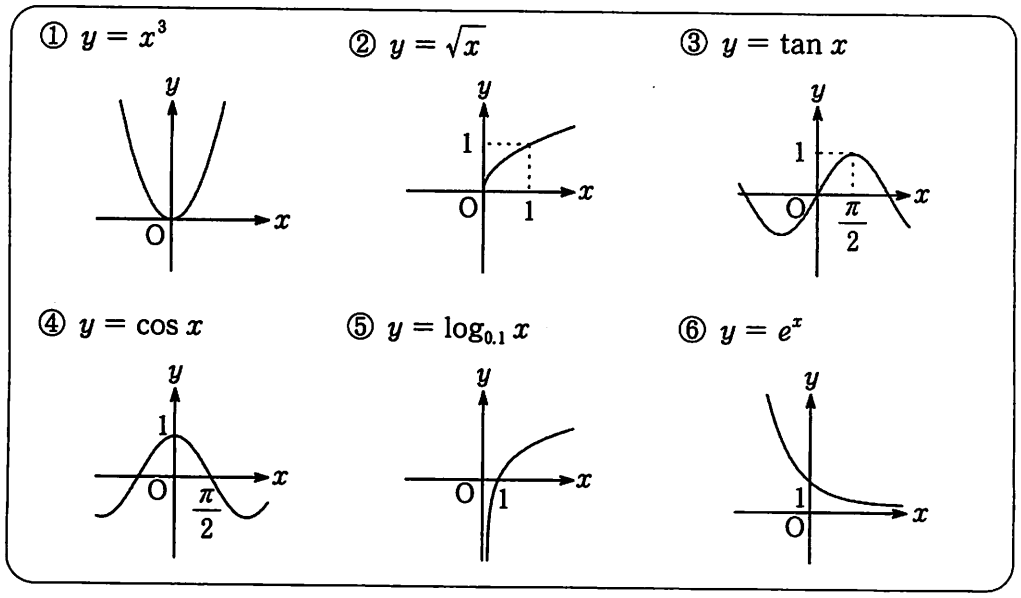
§3　関数とグラフ

1 次の各問いに答えよ。

(1)　2次関数 $y=ax^2+bx+c$ の係数 a，判別式 $D=b^2-4ac$ に対して，$a>0$ かつ $D<0$ のときのグラフは ア で，$a<0$ かつ $D=0$ のときのグラフは イ である。ア，イ に当てはまるものを，次の①～⑥のうちからそれぞれ一つずつ選び，その番号を解答欄にマークせよ。(5×2=10点)



(2)　次の①～⑥は関数とそのグラフを示したものである。関数とグラフの組み合わせで正しいものを二つ選んんで，その番号を解答欄ア，イにそれぞれ一つずつマークせよ。ただし，e は自然対数の底を表す（順不同）。(5×2=10点)



2 対数に関する次の①～⑥の式のうち，すべての $x > 0$ に対して必ず成り立つものを二つ選び，その番号を解答欄ア，イにそれぞれ一つずつマークせよ（順不同）。(5×2=10点)

① $\log_2(x+4) = \log_2 x + 2$　　② $(\log_2 x)^3 = 3\log_2 x$

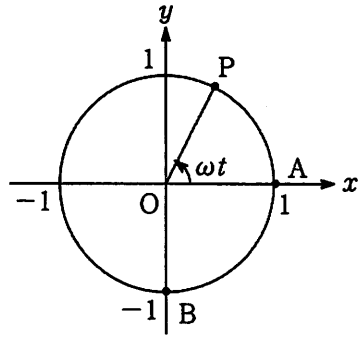
③ $2^{\log_2 x} = x$　　④ $\log_2 x - \log_2 3 = \dfrac{\log_2 x}{\log_2 3}$

⑤ $\log_2 x = \dfrac{\log_{10} x}{\log_{10} 2}$　　⑥ $\log_2 6x = 3 + \log_2 x$

3 関数 $y = \sin x + \cos x$ は，$y = a\sin(x+b)$ の形になおすことができる。このとき，$a =$ ア，$b =$ イ である。ア及びイに当てはまる数を，次の①～⑧のうちからそれぞれ一つずつ選び，その番号を解答欄にマークせよ。(5×2=10点)

① 1　② $\sqrt{3}$　③ $\sqrt{2}$　④ 2　⑤ $\dfrac{\pi}{2}$　⑥ $\dfrac{\pi}{3}$　⑦ $\dfrac{\pi}{4}$　⑧ $\dfrac{\pi}{6}$

4 xy 平面上で原点を中心とする半径 1 の円周上を反時計回りに回転している点 P について考える。P は時刻 $t = 0$ で点 A (1, 0) を出発し，動径 OP の表す角について，1 秒当たり ω ラジアンという一定の速さで回転しているものとする。このとき，次の文章中のア，イに当てはまる数を，下の①～⑨のうちからそれぞれ一つずつ選び，その番号を解答欄にマークせよ。(5×2=10点)



(t 秒後の P の位置)

(1)　$\omega = 3$ のとき，初めて点 B (0, −1) に到達するのは，$t =$ ア 秒後である。

(2)　P が12秒間に円周上を 1 周する速さで回転しているとき，A を出発して20秒後に P のいる点の y 座標は，$y =$ イ である。

① $\dfrac{\pi}{2}$　② π　③ $\dfrac{3}{2}\pi$　④ 2π　⑤ $\dfrac{5}{2}\pi$

⑥ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　⑦ $-\dfrac{1}{2}$　⑧ $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　⑨ $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

§4　場合の数と数列

1 次の各問いに答えよ。

(1) ${}_nC_r$ の値を与える式を次の①～⑤のうちから一つ選び，その番号を解答欄にマークせよ。(5点)

① $n!$　② $\dfrac{n!}{r!}$　③ $\dfrac{n!}{(n-r)!}$　④ $\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$　⑤ $\dfrac{(n-r)!}{r!}$

(2) 次の①～⑥の式のうち正しいものを二つ選び，その番号を解答欄ア，イにそれぞれ一つずつマークせよ（順不同)。(5×2=10点)

① $0!=0$　② $7!=5!\cdot 2!$　③ ${}_{10}C_4={}_{10}P_4\cdot{}_4P_4$
④ ${}_{10}C_0=1$　⑤ ${}_{10}C_3={}_{10}C_7$　⑥ ${}_{10}C_2+{}_{10}C_3={}_{10}C_4$

(3) $(x+y)^5$ を展開したときの x^2y^3 の係数を次の①～⑤のうちから一つ選び，その番号を解答欄にマークせよ。(5点)

① 5　② 10　③ 12　④ 15　⑤ 20

2 次の各問いに答えよ。(5×2=10点)

(1) 初項 $a_1=\sqrt{2}$，第2項 $a_2=1$ である等比数列の第10項を，次の①～⑨のうちから一つ選び，その番号を解答欄にマークせよ。

① $4\sqrt{2}$　② $\sqrt{2}$　③ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　④ $\dfrac{1}{4\sqrt{2}}$　⑤ 16
⑥ 4　⑦ $\dfrac{1}{4}$　⑧ $\dfrac{1}{16}$　⑨ $\dfrac{1}{16\sqrt{2}}$

(2) $r\neq 1$ のとき，等比数列の和 $S_n=1+r+r^2+r^3+\cdots+r^{n-1}$ を表す式を，次の①～⑥のうちから一つ選び，その番号を解答欄にマークせよ。

① $\dfrac{1-r^n}{1-r}$　② $\dfrac{1-r^{n+1}}{1-r}$　③ $\dfrac{1-r^{n-1}}{1-r}$
④ $\dfrac{1+r^n}{1+r}$　⑤ $\dfrac{1+r^{n+1}}{1+r}$　⑥ $\dfrac{1+r^{n-1}}{1+r}$

3 次の各問いに答えよ。(5×2=10点)

(1) 初項が 1 で公差が 2 の等差数列の，初項から第20項までの和を S とする。S の値を①～⑥のうちから一つ選び，その番号を解答欄にマークせよ。

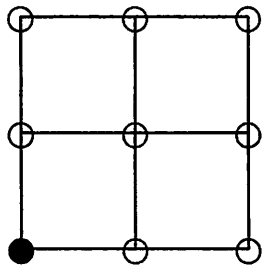
① 361	② 380	③ 400	④ 420	⑤ 441	⑥ 462

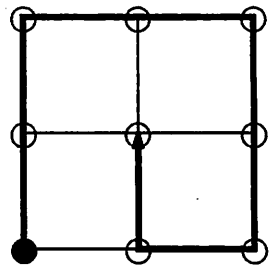
(2) $\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2$ と同じ式を表すものを，次の①～⑤のうちから一つ選び，その番号を解答欄にマークせよ。ただし，$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$，$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ である。

① $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	② $\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$	③ $\frac{n(n+1)(2n-1)}{6}$
④ $\frac{n(n-1)(2n+3)}{6}$	⑤ $\frac{n(n+1)(2n-3)}{6}$	

4 次の図の線の部分は道を，○●の部分は町を表している。●で示した町から出発し，一つの町をそれぞれただ一度だけ通って，すべての町を通る道順は何通りあるか。次の①～④のうちから一つ選び，その番号を解答欄にマークせよ。下右図は道順の例である。道順は例を含めて数えよ。(10点)

(例)





① 6	② 8	③ 9	④ 12

§5　平面ベクトルの性質

1 $\vec{a}=(1,-2)$, $\vec{b}=(-3,1)$ とするとき，次の各問いに答えよ。

(1) $|\vec{a}|=\sqrt{\boxed{ア}}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\boxed{イ}$ である。$\boxed{ア}$ 及び $\boxed{イ}$ に当てはまる数を，次の①～⓪のうちからそれぞれ一つずつ選び，その番号を解答欄にマークせよ。(5×2=10点)

① -5	② -4	③ -3	④ -2	⑤ -1
⑥ 1	⑦ 2	⑧ 3	⑨ 4	⓪ 5

(2) $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角 θ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ は $\square$ である。$\square$ に当てはまる角度を次の①～⑨のうちから一つ選び，その番号を解答欄にマークせよ。(10点)

① 0	② $\frac{\pi}{6}$	③ $\frac{\pi}{4}$	④ $\frac{\pi}{3}$	⑤ $\frac{\pi}{2}$
⑥ $\frac{2}{3}\pi$	⑦ $\frac{3}{4}\pi$	⑧ $\frac{5}{6}\pi$	⑨ π	

2 $\vec{a}=(4,-2)$, $\vec{p}=(x,4)$, $\vec{q}=(2,y)$ とする。$\vec{a}$ と $\vec{p}$ が平行になるとき $x=\boxed{ア}$，$\vec{a}$ と $\vec{q}$ が垂直になるとき $y=\boxed{イ}$ である。$\boxed{ア}$ 及び $\boxed{イ}$ に当てはまる数を，次の①～⓪のうちからそれぞれ一つずつ選び，その番号を解答欄にマークせよ。(5×2=10点)

① -8	② -6	③ -4	④ -2	⑤ -1
⑥ 1	⑦ 2	⑧ 4	⑨ 6	⓪ 8

3 零ベクトルではない二つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ に関する次の①～⑥の記述のうち，**間違ったもの**を二つ選び，その番号を解答欄ア，イにそれぞれ一つずつマークせよ（順不同）。(5×2=10点)

① $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ なら，$\vec{a}$, $\vec{b}$ は垂直である。

② $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ なら，$\vec{a}$, $\vec{b}$ は平行である。

③ $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ が成り立つ。

④ $\vec{a}$ の大きさは $\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$ である。

⑤ 常に $\vec{a}\cdot\vec{b}\geqq 0$ が成り立つ。

⑥ 実数 m に対して，$(m\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(m\vec{b})$ が成り立つ。

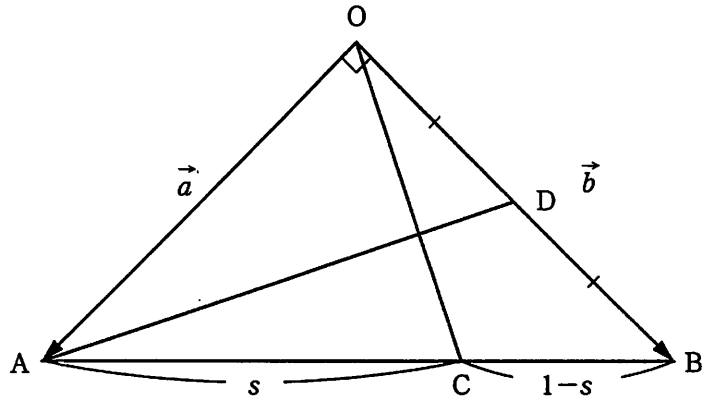
4 下の図の△OABにおいて，線分ABを$s:(1-s)$に内分する点をC，線分OBの中点をDとする（$s>0$）。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$とするとき，次の各問いに答えよ。（5×2=10点）

(1) $\overrightarrow{OC}$は$\vec{a}$，$\vec{b}$を使ってどのように表わされるか。次の①～⑤のうちから一つ選び，その番号を解答欄にマークせよ。

① $s\vec{a}+(1-s)\vec{b}$　② $(1-s)\vec{a}+s\vec{b}$　③ $s\vec{a}-(1-s)\vec{b}$

④ $(1-s)\vec{a}-s\vec{b}$　⑤ $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

(2) OA＝OB＝1，∠AOB＝90°であるとする。$\overrightarrow{OC}$と$\overrightarrow{AD}$が垂直になるとき，$s=\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ア}}$である。**ア**，**イ**に当てはまる数を解答欄にマークせよ。



§6　微分・積分の計算

1 次の各問いに答えよ。(5×4=20点)

(1) $y=(2x+1)^3$ の導関数 y' は次のどれか。次の①～⑤のうちから一つ選び，その番号を解答欄にマークせよ。

① $\frac{1}{4}(2x+1)^4$　② $\frac{1}{8}(2x+1)^4$　③ $(2x+1)^2$　④ $3(2x+1)^2$　⑤ $6(2x+1)^2$

(2) $y=x\log x$ の導関数 y' は次のどれか。次の①～④のうちから一つ選び，その番号を解答欄にマークせよ。

① $\frac{1}{x}$　② $1+\frac{1}{x}$　③ $\log x+1$　④ $\frac{1}{2}x^2\log x-\frac{1}{4}x^2$

(3) 不定積分 $\int x^{-\frac{2}{3}}dx$ は次のどれか。次の①～⑤のうちから一つ選び，その番号を解答欄にマークせよ。ただし，C は積分定数とする。

① $3x^{\frac{1}{3}}+C$　② $x^{\frac{1}{3}}+C$　③ $-\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}+C$　④ $x^{-\frac{5}{3}}+C$　⑤ $-\frac{3}{5}x^{-\frac{5}{3}}+C$

(4) 不定積分 $\int \frac{x}{x^2+1}dx$ は次のどれか。次の①～⑤のうちから一つ選び，その番号を解答欄にマークせよ。ただし，C は積分定数とする。

① $x\tan^{-1}x+C$　② $\tan^{-1}x+\frac{1}{2}\log(x^2+1)+C$　③ $\frac{1}{2}\log(x^2+1)+C$

④ $\frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$　⑤ $\frac{1}{2}x^2+C$

2 $f(x)=e^{2x}\sin 3x$ について，次の各問いに答えよ。(5×2=10点)

(1) 導関数 $f'(x)$ は次のどれか。次の①～⑤のうちから一つ選び，その番号を解答欄にマークせよ。

① $2e^{2x}\sin 3x$　② $2e^{2x}\cos 3x$　③ $(2\sin 3x+3\cos 3x)e^{2x}$

④ $(2\sin 3x-3\cos 3x)e^{2x}$　⑤ $-3e^{2x}\cos 3x$

(2) $f(x)$ の $x=0$ における微分係数は次のどれか。次の①～⑦のうちから一つ選び，その番号を解答欄にマークせよ。

① $3e$　② $2e$　③ 0　④ 2　⑤ 3　⑥ -3　⑦ $-3e$

3 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ を，$x=\sin t$ とおいて置換積分で求める。次の各問いに答えよ。

（5×2=10点）

(1) 置換された定積分の式はどのような式になるか。次の①～⑥のうちから一つ選び，その番号を解答欄にマークせよ。

① $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} dt$	② $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} dt$	③ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} dt$
④ $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\cos t}$	⑤ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{\cos t}$	⑥ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{\cos t}$

(2) 定積分の値を次の①～⑥のうちから一つ選び，その番号を解答欄にマークせよ。

① $\displaystyle\frac{1}{2}\log\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$　② $\displaystyle\frac{1}{2}\log\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$　③ $\displaystyle\frac{1}{2}\log 3$　④ $\displaystyle\frac{\pi}{6}$　⑤ $\displaystyle\frac{\pi}{3}$　⑥ $\displaystyle\frac{1}{2}$

4 n を正の整数として，$I_n=\displaystyle\int(\log x)^n dx$ とおく。このとき，次の各問いに答えよ。

（5×2=10点）

(1) I_n を漸化式で表すと，$I_n=x(\log x)^n-$□となる。□に当てはまる式を次の①～⑥のうちから一つ選び，その番号を解答欄にマークせよ。

① I_{n-1}　② xI_{n-1}　③ nI_{n-1}　④ I_{n-2}　⑤ xI_{n-2}　⑥ nI_{n-2}

(2) (1)で求めた漸化式を用いて $I_2=\displaystyle\int(\log x)^2 dx$ を求めると□となる。□に当てはまる式を次の①～⑤のうちから一つ選び，その番号を解答欄にマークせよ。ただし，C は積分定数とする。

① $x(\log x)^2-x\log x+x+C$　② $x(\log x)^2-2x\log x+2x+C$
③ $x(\log x)^2+nx+C$　④ $x(\log x)^2-nx+C$　⑤ $x(\log x)^2+x+C$

§7　微分・積分の応用

1 次の各問いに答えよ。

(1) 関数 $y = -x^3+3x^2$ は $x =$ ア のとき極大値 $y =$ イ をとる。ア，イ に当てはまる数を，解答欄にマークせよ。(5×2=10点)

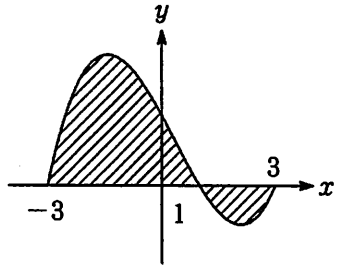
(2) 関数 $y = -x^3+3x^2$ が増加する x の範囲は ア，減少する x の範囲は イ である。ア，イ に当てはまる式を，次の①～⑦のうちからそれぞれ一つずつ選び，その番号を解答欄にマークせよ。(5×2=10点)

① $x > 0$	② $x < 2$	③ $0 < x < 2$
④ $x < 0,\ 2 < x$	⑤ $x > -2$	⑥ $0 < x < 3$
⑦ $x < -2,\ 0 < x$		

2 次の各問いに答えよ。

(1) 曲線 $y = x^2$ と直線 $y = x$ とで囲まれた図形の面積は $\frac{\text{イ}}{\text{ア}}$ である。ア，イ に当てはまる数を，解答欄にマークせよ。(5点)

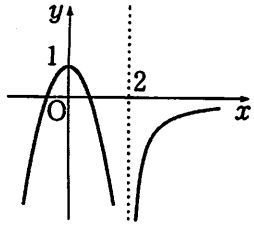
(2) 下の図は関数 $y = f(x)$ のグラフの $-3 \leqq x \leqq 3$ の部分を示したものである。斜線部の面積を表す式を，次の①～⑤のうちから一つ選び，その番号を解答欄にマークせよ。(5点)

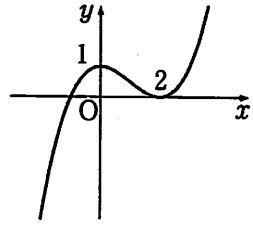


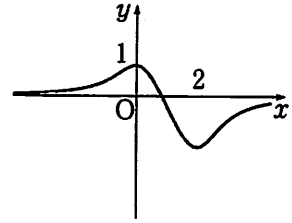
① $\int_{-3}^{3} \lvert f(x) \rvert dx$	② $\int_{-3}^{3} f(x)\,dx$	③ $\left\lvert \int_{-3}^{3} f(x)\,dx \right\rvert$
④ $2\int_{0}^{3} f(x)\,dx$	⑤ $\int_{-3}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{3} f(x)\,dx$	

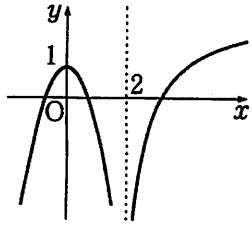
3　関数 $y=f(x)$ は，$\lim_{x\to 2\pm 0} f(x)=-\infty$，$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$ を満たし，増減表は右の表のようになる。この関数のグラフはどのようなグラフになるか。次の①～⑥のうちから一つ選び，その番号を解答欄にマークせよ。(10点)

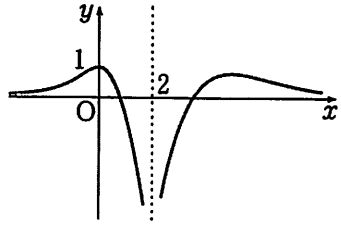
x		0		2	
y'	+	0	−	/	+
y	↗	1	↘	/	↗

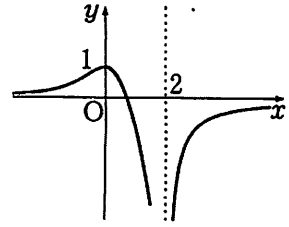
①


②


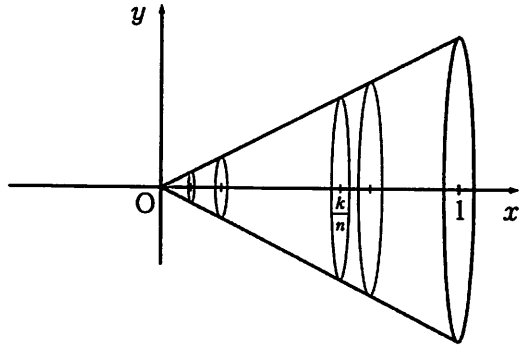
③


④


⑤


⑥


4　直線 $y=x\ (0\leqq x\leqq 1)$ を x 軸の周りに1回転させて回転体を作る。区間 $[0,\ 1]$ を n 等分した分点を $0=x_0<x_1<\cdots<x_n=1$ とする。各分点 $x_k=\dfrac{k}{n}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ を通り，x 軸に垂直な平面 α_k でこの回転体を切って，厚さ $\dfrac{1}{n}$ の n 個の小片に分ける。平面 α_k による断面積を S_k とするとき，次の各問いに答えよ。(5×2=10点)



(1)　S_k の値を，次の①～⑥のうちから一つ選び，その番号を解答欄にマークせよ。

① $\pi\left(\dfrac{k}{n}\right)$　② $\pi\left(\dfrac{k}{n}\right)^2$　③ $2\pi\left(\dfrac{k}{n}\right)$　④ $2\pi\left(\dfrac{k}{n}\right)^2$　⑤ $\dfrac{k}{n}$　⑥ $\left(\dfrac{k}{n}\right)^2$

(2)　$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n}S_k=$□となる。□に当てはまるものを，次の①～⑧のうちから一つ選び，その番号を解答欄にマークせよ。

① π　② $\dfrac{\pi}{2}$　③ $\dfrac{\pi}{3}$　④ $\dfrac{2}{3}\pi$　⑤ $\dfrac{1}{2}$　⑥ $\dfrac{1}{3}$　⑦ $\pi\dfrac{k}{n}$　⑧ $\pi\left(\dfrac{k}{n}\right)^2$

§8　空間ベクトル，行列の計算

1 次の各問いに答えよ。

(1)　空間内の 2 点 A (1, 2, 3)，B (−1, 5, −2) を通る直線の方程式は，$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-3}{\boxed{ア}}$ である。また，この直線上の点で y 座標が -4 のとき，この点の x 座標は **イ** である。**ア**，**イ** に当てはまる数を解答欄にマークせよ。(5×2=10点)

(2)　$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}1 & \square\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ である。□に当てはまる数を解答欄にマークせよ。(10点)

2 平面 $\alpha: 2x-3y-2z+3=0$ と，α 上にない点 A (−3, 4, 1) がある。このとき次の各問いに答えよ。(5×2=10点)

(1)　平面 α に垂直なベクトルは次のうちのどれか。次の①～⑥のうちから一つ選び，その番号を解答欄にマークせよ。

① (3, −2, 3)	② (2, 3, 2)	③ (2, −3, −2)
④ (4, −6, 4)	⑤ (4, −2, 3)	⑥ (3, −2, 4)

(2)　点 A を通って平面 α に垂直な直線の方程式は次のうちのどれか。次の①～⑥のうちから一つ選び，その番号を解答欄にマークせよ。

① $\dfrac{x}{-3}=\dfrac{y}{4}=z$	② $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-4}{-3}=\dfrac{z-1}{-2}$
③ $\dfrac{x-2}{-3}=\dfrac{y+3}{4}=z+2$	④ $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-4}{4}=\dfrac{z-1}{1}$
⑤ $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+4}{-3}=\dfrac{z+1}{-2}$	⑥ $\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{3}y-\dfrac{1}{2}z+1=0$

3 次の各問いに答えよ。(5×2=10点)

(1) 2直線 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{-3}=\dfrac{z}{6}$, $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z-1}{a}$ が垂直になるのは，$a=$□のときである。□に当てはまる数を解答欄にマークせよ。

(2) 2平面 $ax+3y-cz+2=0$, $4x+by-8z+5=0$ が平行になる a, b, c の値を次の①～⑤のうちから一つ選び，その番号を解答欄にマークせよ。

① $a=-1, b=-2, c=0$　② $a=4, b=3, c=-8$　③ $a=-1, b=1, c=1$
④ $a=2, b=6, c=4$　⑤ $a=-3, b=4, c=0$

4 A, B, X は n 次の正方行列，O は n 次の零行列，E は n 次の単位行列，A^{-1} は A の逆行列，${}^tA$ は A の転置行列（行と列を入れ替えた行列）とする。このとき，行列の性質を述べた次の①～⑦の記述のうち，正しいものを二つ選び，その番号を解答欄ア，イにそれぞれ一つずつマークせよ（順不同）。ただし，$n \geqq 2$ とする。(5×2=10点)

① A^{-1}, B^{-1} が存在するとき，$(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$ は常に成り立つ。
② $A^3-E=(A-E)(A^2+A+E)$ は常に成り立つ。
③ $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ は常に成り立つ。
④ ${}^t(AB)={}^tA{}^tB$ は常に成り立つ。
⑤ $(X-A)(X-B)=O$ ならば，$X=A$ または $X=B$ は常に成り立つ。
⑥ $AC=BC$ ならば，$A=B$ は常に成り立つ。
⑦ $A^2=E$ ならば，$A=A^{-1}$ は常に成り立つ。

§9　行列の固有値と行列式

1 次の各問いに答えよ。

(1) 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ の値は□である。□に当てはまる数を解答欄にマークせよ。(10点)

(2) 行列式 $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 7 & 0 & 9 \end{vmatrix}$ の値は次のどれと同じになるか。次の①～⑥のうちから一つ選び，その番号を解答欄にマークせよ。(10点)

① $3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 9 \end{vmatrix}$　② $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$　③ $5\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 9 \end{vmatrix}$

④ $-3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 9 \end{vmatrix}$　⑤ $-\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$　⑥ $-5\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 9 \end{vmatrix}$

2 連立方程式 $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ について，次の各問いに答えよ。(5×2=10点)

(1) この連立方程式が $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 以外の解を持つための条件は $a =$□である。

□に当てはまる数を，次の①～⑧のうちから一つ選び，その番号を解答欄にマークせよ。

① 1　② -1　③ 2　④ -2　⑤ $\frac{1}{2}$　⑥ $-\frac{1}{2}$　⑦ 4　⑧ -4

(2) このときの解 x, y は，どのような方程式を満たすか。次の①～⑥のうちから一つ選び，その番号を解答欄にマークせよ。

① $y = x$　② $y = 2x$　③ $y = \frac{1}{2}x$　④ $y = -x$　⑤ $y = -2x$　⑥ $y = -\frac{1}{2}x$

3 行列 $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 5\end{pmatrix}$ について，次の各問いに答えよ。(5×2=10点)

(1) A の固有値は，1 と□である。□に当てはまる数を解答欄にマークせよ。

(2) 固有値 1 に対する A の固有ベクトルは，$k\begin{pmatrix}\square\\ 1\end{pmatrix}$ (k は 0 でない任意の定数) となる。

□に当てはまる数を，次の①～⑥のうちから一つ選び，その番号を解答欄にマークせよ。

① 4	② -4	③ $\frac{1}{4}$	④ $-\frac{1}{4}$	⑤ 1	⑥ -1

4 行列 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ の固有値が 1, 2 であるとき，次の①～⑤の記述のうち，**間違ったもの**を二つ選び，その番号を解答欄ア，イにそれぞれ一つずつマークせよ（順不同)。
ただし，E は 2 次の単位行列を表す。(5×2=10点)

① $|A-E|=0$ となる。

② $|A+E|=0$ となる。

③ ある正則行列 P に対して，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ となる。

④ 行列 $A-2E$ は逆行列を持たない。

⑤ 連立方程式 $\begin{cases}ax+by=x\\ cx+dy=y\end{cases}$ は $x=y=0$ しか解を持たない。

§10　2変数関数の微分・積分

1 次の各問いに答えよ。(10×2=20点)

(1) $z=\dfrac{x}{y^2}$ のとき，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=$□である。□に当てはまる式を，次の①～⑥のうちから一つ選び，その番号を解答欄にマークせよ。

① $\dfrac{x}{2y}$	② $-\dfrac{x}{2y}$	③ $-\dfrac{2x}{y}$
④ $\dfrac{1-2x}{y}$	⑤ $-\dfrac{2x}{y^3}$	⑥ $\dfrac{1-2x}{y^3}$

(2) $D=\{(x, y)\mid 1\leqq x\leqq 2,\ 0\leqq y\leqq 2\}$ とするとき，重積分 $\iint_D xy^2dxdy$ の値を，次の①～④のうちから一つ選び，その番号を解答欄にマークせよ。

① $\dfrac{16}{3}$	② $\dfrac{8}{3}$	③ 4	④ 2

2 次の各問いに答えよ。(5×2=10点)

(1) 次の関数のうち，$(x, y)=(0, 0)$ で極小となるものはどれか。次の①～④のうちから一つ選び，その番号を解答欄にマークせよ。

① $z=x^2-y^3$	② $z=x^2+y^3$	③ $z=x^2-y^4$	④ $z=x^4+y^2$

(2) $z=x^2y^3$ とする。$(x, y)=(1, 1)$ から x の値が 0.02，y の値が 0.01 だけ増加したときの z の変化量の近似値を偏導関数を用いて求め，その値を次の①～⑤のうちから一つ選び，その番号を解答欄にマークせよ。

① 0.01	② 0.03	③ 0.05	④ 0.07	⑤ 0.09

3 次の各問いに答えよ。(5×2=10点)

(1) 累次積分 $\int_1^2 \left\{ \int_3^{2x+1} f(x, y)\, dy \right\} dx$ の積分順序を変更するとどのような式になるか。正しいものを次の①～⑥のうちから一つ選び，その番号を解答欄にマークせよ。

① $\int_3^{2x+1} \left\{ \int_1^2 f(x, y)\, dx \right\} dy$　② $\int_1^2 \left\{ \int_3^{2y+1} f(x, y)\, dx \right\} dy$　③ $\int_3^{\frac{y-1}{2}} \left\{ \int_1^2 f(x, y)\, dx \right\} dy$

④ $\int_1^2 \left\{ \int_3^{\frac{y-1}{2}} f(x, y)\, dx \right\} dy$　⑤ $\int_3^5 \left\{ \int_{\frac{y-1}{2}}^2 f(x, y)\, dx \right\} dy$　⑥ $\int_3^5 \left\{ \int_1^{\frac{y-1}{2}} f(x, y)\, dx \right\} dy$

(2) $D = \{(x, y) \mid y \geqq 0, x^2+y^2 \leqq 4\}$ とする。重積分 $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy$ を極座標 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ によって変数変換した式はどれか。次の①～⑧のうちから一つ選び，その番号を解答欄にマークせよ。

① $\int_0^2 \left\{ \int_0^{\pi} rd\theta \right\} dr$　② $\int_0^2 \left\{ \int_0^{2\pi} rd\theta \right\} dr$　③ $\int_0^2 \left\{ \int_0^{\pi} r^2 d\theta \right\} dr$　④ $\int_0^2 \left\{ \int_0^{2\pi} r^2 d\theta \right\} dr$

⑤ $\int_0^4 \left\{ \int_0^{\pi} rd\theta \right\} dr$　⑥ $\int_0^4 \left\{ \int_0^{2\pi} rd\theta \right\} dr$　⑦ $\int_0^4 \left\{ \int_0^{\pi} r^2 d\theta \right\} dr$　⑧ $\int_0^4 \left\{ \int_0^{2\pi} r^2 d\theta \right\} dr$

4 x, y の2変数関数 $z = ax^2+2bxy+cy^2$ が $(x, y) = (0, 0)$ で極値をとるための条件を調べたい。次の各問いに答えよ。ただし，a, b, c を定数とする。(5×2=10点)

(1) $a = c = 0$, $b \neq 0$ のとき，z は $(x, y) = (0, 0)$ で極値をとるか。次の①～⑤のうちから正しいものを一つ選び，その番号を解答欄にマークせよ。

① 極値をとり，極大値である　② 極値をとり，極小値である
③ 極値をとるが，極大値か極小値かは不明
④ 極値はとらない　⑤ 極値をとるかどうかは不明

(2) $a \neq 0$ のとき，z は次のように変形できる。

$$z = a\left(x+\frac{b}{a}y\right)^2+\frac{ac-b^2}{a}y^2$$

これを参考にして，z が $(x, y) = (0, 0)$ において極大値をとるための条件を，次の①～④のうちから一つ選び，その番号を解答欄にマークせよ。

① $a > 0$, $ac-b^2 > 0$　② $a > 0$, $ac-b^2 < 0$
③ $a < 0$, $ac-b^2 > 0$　④ $a < 0$, $ac-b^2 < 0$

平成１９年度国立高等専門学校学習到達度試験　「数学」　正解

§1　数と式の計算　(50点)

			正解	配点	
1	(1)	ア	5	5	
		イ	4		
	(2)	ア	5	5	
		イ	7		
	(3)	ア	5	5	
		イ	7		
	(4)	ア	6	5	
		イ	2		
2		ア	2	10	
		イ	1		
3		ア	4	5	※1
		イ	6	5	※2
4		ア	6	5	
		イ	3	5	

§2　方程式・不等式　(50点)

			正解	配点	
1	(1)	ア	6	5	
		イ	3		
		ウ	2		
		エ	1		
	(2)		5	5	
	(3)	ア	1	5	※1
		イ	4	5	※2
2		ア	3	5	※1
		イ	6	5	※2
3	(1)		2	5	
	(2)		8	5	
4			7	10	

§3　関数とグラフ　(50点)

			正解	配点	
1	(1)	ア	3	5	
		イ	5	5	
	(2)	ア	2	5	※1
		イ	4	5	※2
2		ア	3	5	※1
		イ	5	5	※2
3		ア	3	5	
		イ	7	5	
4	(1)	ア	1	5	
	(2)	イ	9	5	

§4　場合の数と数列　(50点)

			正解	配点	
1	(1)		4	5	
	(2)	ア	4	5	※1
		イ	5	5	※2
	(3)		2	5	
2	(1)		8	5	
	(2)		1	5	
3	(1)		3	5	
	(2)		2	5	
4			2	10	

§5　平面ベクトルの性質　(50点)

			正解	配点	
1	(1)	ア	0	5	
		イ	1	5	
	(2)		7	10	
2		ア	1	5	
		イ	8	5	
3		ア	2	5	※1
		イ	5	5	※2
4	(1)		2	5	
	(2)	ア	3	5	
		イ	2		

§6　微分・積分の計算　(50点)

		正解	配点
1	(1)	5	5
	(2)	3	5
	(3)	1	5
	(4)	3	5
2	(1)	3	5
	(2)	5	5
3	(1)	2	5
	(2)	4	5
4	(1)	3	5
	(2)	2	5

§7　微分・積分の応用　(50点)

			正解	配点
1	(1)	ア	2	5
		イ	4	5
	(2)	ア	3	5
		イ	4	5
2	(1)	ア	6	5
		イ	1	
	(2)		1	5
3			6	10
4	(1)		2	5
	(2)		3	5

§8　空間ベクトル，行列の計算　(50点)

			正解	配点	
1	(1)	ア	5	5	
		イ	5	5	
	(2)		6	10	
2	(1)		3	5	
	(2)		2	5	
3	(1)		1	5	
	(2)		4	5	
4		ア	2	5	※1
		イ	7	5	※2

§9　行列の固有値と行列式　(50点)

			正解	配点	
1	(1)		7	10	
	(2)		5	10	
2	(1)		8	5	
	(2)		2	5	
3	(1)		6	5	
	(2)		2	5	
4		ア	2	5	※1
		イ	5	5	※2

§10　２変数関数の微分・積分　(50点)

		正解	配点
1	(1)	5	10
	(2)	3	10
2	(1)	4	5
	(2)	4	5
3	(1)	5	5
	(2)	3	5
4	(1)	4	5
	(2)	3	5

※1, ※2は順不同

（注意事項の続き）

5　解答には，必ず「H，F，HBのいずれかの黒鉛筆」，「プラスチック製の消しゴム」を使用してください。

6　定規，ものさし，コンパス，分度器及び計算機は使用できません。

7　解答用紙の指定の箇所に個人番号と氏名を記入してください。
また，個人番号欄に自分の番号をマークしてください。
（例）００１番の場合

個人番号	－	① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ●
	－	① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ●
	－	● ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⓪

8　設問の解答は，解答用紙の当該設問に対応した解答欄にマークしてください。
（例１　選択肢のうちから一つ選び，解答する場合）
設問 1 (1) に対して，選択肢番号 ⑤ と解答するとき

		解　答　欄
		1 2 3 4 5 6 7 8 9 0
1	(1)	① ② ③ ④ ● ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⓪
	(2)	① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⓪

（例２　空欄に当てはまる数字等を解答する場合）
設問 3 (1) ア イ ウ に対して，「136」と解答するとき

			解　答　欄
			1 2 3 4 5 6 7 8 9 0
3	(1)	ア	● ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⓪
		イ	① ② ● ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⓪
		ウ	① ② ③ ④ ⑤ ● ⑦ ⑧ ⑨ ⓪
	(2)		① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⓪

9　試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁，乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。

10　問題冊子の余白は適宜利用して構いません。

11　試験終了後，問題冊子は持ち帰ってください。