

1. 次の問に答えよ.

(1) 次の式を因数分解せよ.

$$3x^2 + 7xy - 20y^2$$

(2) $a + b = 4$, $ab = 2$ のとき $a^3 + b^3$ の値を求めよ.

(3) 整式 $3x^3 - 4x + 2$ を 1 次式 $x + 1$ で割ったときの余りを求めよ.

(4) 次の式の分母を有理化せよ.

$$\frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1} - x}$$

(5) 次の計算をして, 結果を $a + bi$ の形に表せ. ただし

$$i = \sqrt{-1} \text{ である.}$$

$$\frac{2 - 3i}{1 + 3i}$$

(6) 次の 2 次方程式を解け.

$$3x^2 + 6x + 1 = 0$$

(7) 2 次方程式 $x^2 - (m - 1)x + m = 0$ が実数解をもつような定数 m の値の範囲を求めよ.

(8) 次のベクトル \vec{a} , \vec{b} が垂直になるように x の値を定めよ.

$$\vec{a} = (1, -2), \quad \vec{b} = (x, 3 - x)$$

(9) 次の方程式で表される円の中心の座標と半径を求めよ.

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$$

(10) 放物線 $y^2 = 2x$ を x 軸方向に 2, y 軸方向に 1 平行移動したときの曲線の方程式を求めよ.

(11) $0 \leq \theta \leq \pi$ のとき $\sin \theta = \frac{1}{2}$ を満たす θ を求めよ.

(12) $\tan \theta = t$ として $\cos^2 \theta$ を t を用いて表せ.

(13) $\log_{10} 2 = a$, $\log_{10} 3 = b$ とするとき $\log_{10} 2\sqrt{6}$ の値を a, b で表せ.

(14) $\cos 75^\circ$ の値を加法定理を用いて求めよ.

(15) 次の式を $r \sin(x + \alpha)$ の形に変形せよ. ただし $r > 0$ とする.

$$\sqrt{3} \sin x + \cos x$$

(16) 次の値を求めよ.

$$\sum_{k=1}^{100} (k + 1)$$

(17) 次の行列を用いて $AB - A$ を計算せよ. また逆行列 A^{-1} を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(18) 次の行列が逆行列をもたないように x の値を定めよ.

$$\begin{pmatrix} x & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(19) 次の行列式の値を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 3 \\ 8 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

2. 次の関数を微分せよ.

$$(1) y = \sqrt{x^2 - 2x - 5}$$

$$(2) y = \sin^2(2x + 3)$$

$$(3) y = e^{2x} \log(2x + 1)$$

$$(4) y = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

3. 次の関数の増減を調べ極値を求めよ.

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1}$$

4. 次の不定積分を求めよ.

$$(1) \int \cos(3x + 5) dx$$

$$(2) \int x\sqrt{x+3} dx$$

$$(3) \int x \log x dx$$

$$(4) \int \frac{x+7}{(x-1)(x+3)} dx$$

5. 曲線 $y^2 = 4x$ と曲線 $x^2 = 4y$ とで囲まれた図形の面積を求めよ.

解答

1.

(1) $(3x - 5y)(x + 4y)$

(2) 40

(3) 3

(4) $2x^2 + 1 + 2x\sqrt{x^2 + 1}$

(5) $-\frac{7}{10} - \frac{9}{10}i$

(6) $\frac{-3 \pm \sqrt{6}}{3}$

(7) $m \leq 3 - 2\sqrt{2}, \quad m \geq 3 + 2\sqrt{2}$

(8) 2

(9) 中心の座標 $(-3, 2)$ 半径 5

(10) $y^2 - 2y - 2x + 5 = 0$

(11) $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

(12) $\frac{1}{1+t^2}$

(13) $\frac{3a+b}{2}$

(14) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$, (途中の式の変形は省略)

(15) $2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

(16) 5150

(17) $AB - A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

(18) 6

(19) 32

2.

(1) $y' = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-5}}$

(2) $y' = 4 \sin(2x+3) \cos(2x+3)$

(3) $y' = 2e^{2x} \left(\log(2x+1) + \frac{1}{2x+1} \right)$

(4) $y' = \frac{1}{1+\cos x}$

3. 増減表

x	...	-1	...	1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	×	-	0	+
$f(x)$	↗	-1	↘	×	↘	7	↗

極大値 -1 ($x = -1$)

極小値 7 ($x = 3$)

4. C は積分定数とする.

(1) $\frac{1}{3} \sin(3x+5) + C$

(2) $\frac{2}{5}(x+3)^2\sqrt{x+3} - 2(x+3)\sqrt{x+3} + C$

(3) $\frac{1}{2}x^2 \log x - \frac{1}{4}x^2 + C$

(4) $\log \left| \frac{(x-1)^2}{x+3} \right| + C$

5.

$$\int_0^4 \left(2\sqrt{x} - \frac{1}{4}x^2 \right) dx = \frac{16}{3}$$