

1. 次の問に答えよ.

(1) 次の式を因数分解せよ.

$$xy - x - y + 1$$

(2) 次の方程式を解け.

$$|2x - 1| = 3$$

(3) 次の和を求めよ.

$$\sum_{k=1}^n (2^k - 1)$$

(4) 次の連立方程式を解け.

$$\begin{cases} -x^2 + 4x - 3 < 0 \\ x^2 - 16 \leq 0 \end{cases}$$

(5) 2次関数 $y = -2x^2 - 4x + 1$ ($-2 \leq x \leq 2$) の最大値と最小値を求めよ. また, そのときの x の値も求めよ.

(6) 次の式を簡単にせよ.

i. $\frac{1}{\sqrt[3]{3}} \times \sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt[6]{3}}$

ii. $2 \log_2 \frac{1}{3} - \log_2 \frac{4}{9}$

(7) 2つのベクトル $\vec{a} = (-3, k, 1)$, $\vec{b} = (2, 1, 4)$ がある.

i. \vec{a} , \vec{b} のなす角が 90° となるように定数 k の値を定めよ.

ii. ベクトル \vec{b} の大きさを求めよ.

(8) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ のとき, $AX = E$ を満たす行列 X を求めよ. ただし E は2次の単位行列とする.

(9) 次の等式が成り立つように a の値を定めよ.

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 1 & a & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 20$$

(10) $\tan \theta = -3$ のとき $\cos \theta$, $\sin \theta$ の値を求めよ. ただし $0 < \theta < \pi$ とする.

(11) 次の値を求めよ.

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$$

(12) 点 $(-1, 2)$ を通り, 中心 $(2, -1)$ である円の方程式を求めよ.

2. 次の関数のマクローリン展開を x^2 の項まで求めよ.

$$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}}$$

3. 次の関数 y を x で微分せよ. ただし a は定数, t は媒介変数である.

(1) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

(2) $y = \sqrt{x^2 + 1}$

(3) $y = \log(1 + \sin x)$

(4) $x^2 + y^2 = a^2$

$$(5) \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

4. 次の積分を計算せよ. ただし e は自然対数の底である.

(1) $\int \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx$

(2) $\int \frac{dx}{x(x+1)}$

(3) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$

(4) $\int_0^2 (2-x)e^x dx$

(5) $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx$

5. 関数 $y = \log(x-1)$ について, 次の問に答えよ. ただし e は自然対数の底である.

(1) グラフの概形をかけ. ただし, 漸近線を明示すること.

(2) その曲線と x 軸と直線 $x = 1 + e$ で囲まれる部分の面積を求めよ.

6. 関数 $f(x) = 5x^2 e^{-x}$ について, 次の問に答えよ. ただし e は自然対数の底である.

(1) $f'(x)$ を求めよ.

(2) 増減を調べ, 極値を求めよ.

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ を求めよ. (ロピタルの定理を用いてもよい)

(4) 上の結果を用いて, $-1 \leq x \leq 6$ の範囲でグラフの概形をかけ. ただし, $e \approx 3$ とし, 変曲点は不要.

解答

1.

(1) $(x-1)(y-1)$

(2) $-1, 2$

(3) $2^{n+1} - n - 2$

(4) $-4 \leq x < 1, 3 < x \leq 4$

(5) 最大値 3 ($x = -1$)

最小値 -15 ($x = 2$)

(6)

i. 1

ii. -2

(7) $k = 2$

(8) $\sqrt{21}$

(9) $-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

(10) $a = 6$

(11) $\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{10}}, \sin \theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$

(12) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

(13) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 18$

2. $1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots$ ($|x| < 1$)

3.

(1) $y' = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$

(2) $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

(3) $y' = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

(4) $y' = -\frac{x}{y}$

(5) $\frac{\sin t}{1 - \cos t}$

4.

(1) $\log|x^2 - x + 1| + C$

(2) $\log\left|\frac{x}{x+1}\right| + C$

(3) $\frac{1}{\cos x} + C$

(4) $e^{2x} - 3$

(5) $\frac{1}{3}$

5.

(1) (グラフ略)

(2) $\int_2^{1+e} \log(x-1) dx = 1$

6.

(1) $5xe^{-x}(2-x)$

(2) 増減表

x	\dots	0	\dots	2	\dots
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	\searrow	0	\nearrow	$\frac{20}{e^2}$	\searrow

極大値 $\frac{20}{e^2}$ ($x = 2$)

極小値 0 ($x = 0$)

(3) 0

(4) (グラフ略)