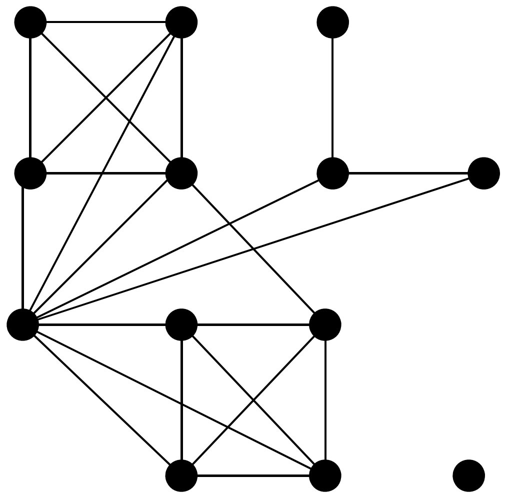
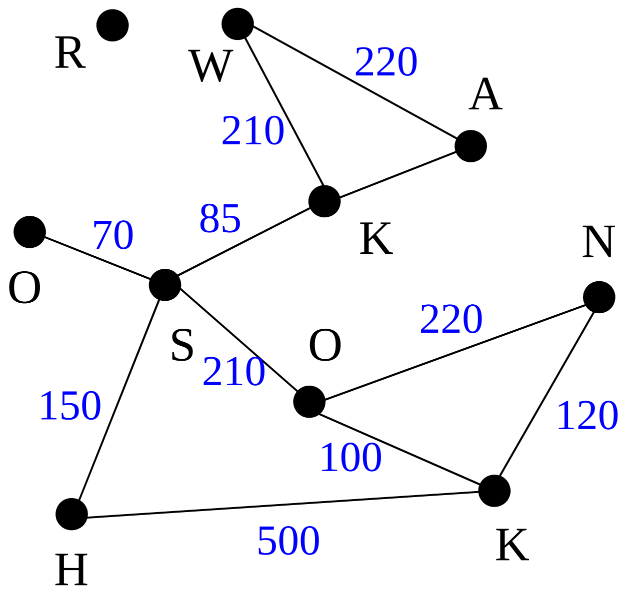
1　グラフ理論基礎

グラフとは

事象，関係，形状等を点と線の組み合わせでモデル化．
日本の第一人者は秋山仁先生．



友人関係

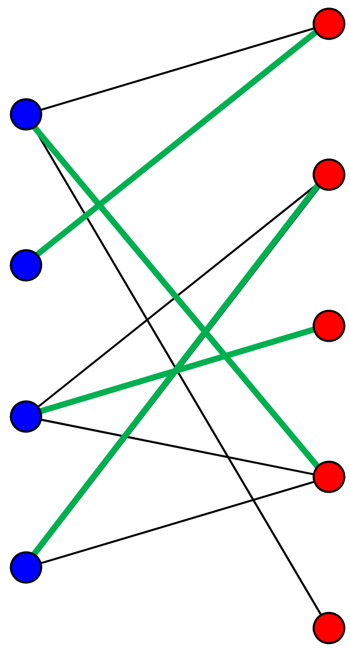


地図

NEXT

マッチング問題の例

9名の男女の集団お見合いで最大限にカップルを誕生させよ.



お見合い

NEXT

1.1 一般グラフ(general graph)

節点(vertex)とそれらを結ぶ辺(edge)で構成される図形.

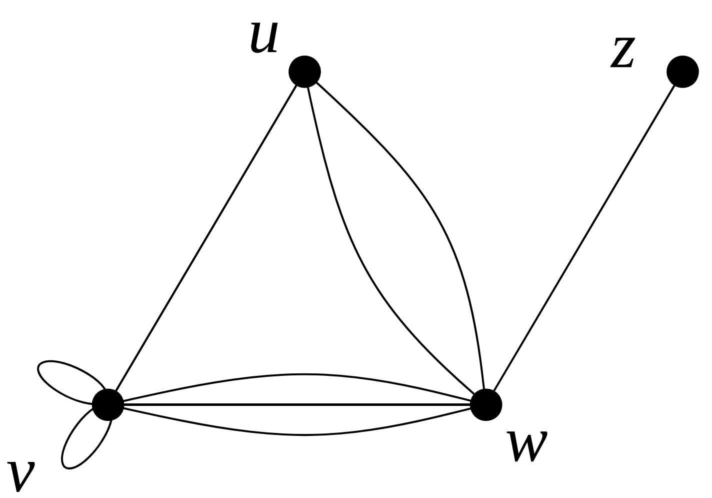
グラフGの集合表現.

$$G=(V, E)$$

$$V=\{v,u,w,z\},$$

$$E=\{uv,\ uw,\ uw,\ vw,\ vw,\ vw,\ vz,\ vv,\ vv\}$$

V: 節点集合(vertex set)
E: 辺集合(edge set)



一般グラフG

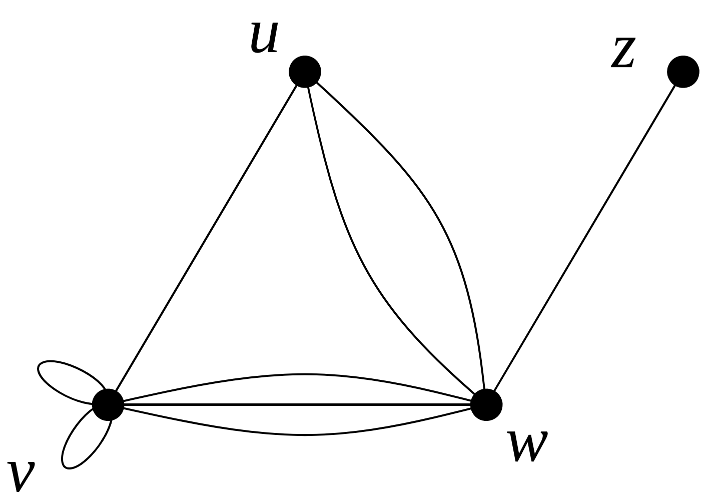
NEXT

ループ(loop) : 同じ点を結ぶ辺.

vv

多重辺(multiple edges): 節点間にある 2本以上の辺.

uw, *vw*



一般グラフG

NEXT

1.2　単純グラフ(simple graph)

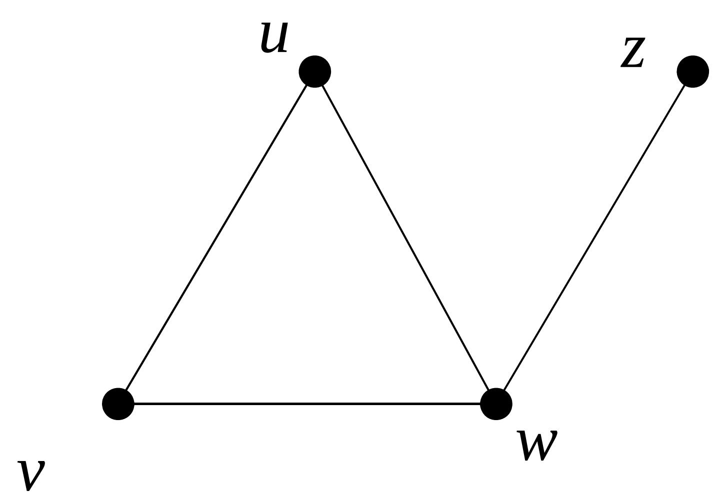
ループや多重辺を含まないグラフ.

グラフGの集合表現.

$$G=(V, E)$$

$$V=\{v, u, w, z\}$$

$$E=\{uv, uw, vw, wz\}$$



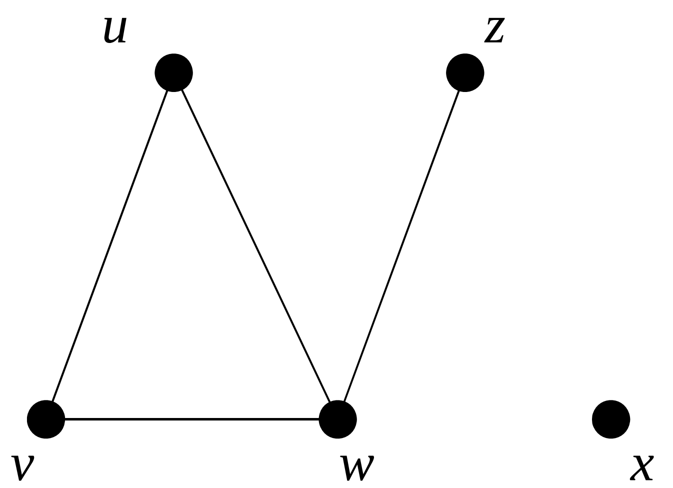
単純グラフG

NEXT

1.3 基本用語

隣接(adjacent): 2つの節点が辺の両端に接続している関係.
次数(degree): 節点 v に接続している辺の本数, $d(v)$.
孤立点(isolated vertex): 次数 0 の節点.
端点(end vertex): 次数 1 の節点.

節点 u と v は隣接している.
節点 w の次数は $d(w)=3$ である.
節点 x は孤立点である.
節点 z は端点である.

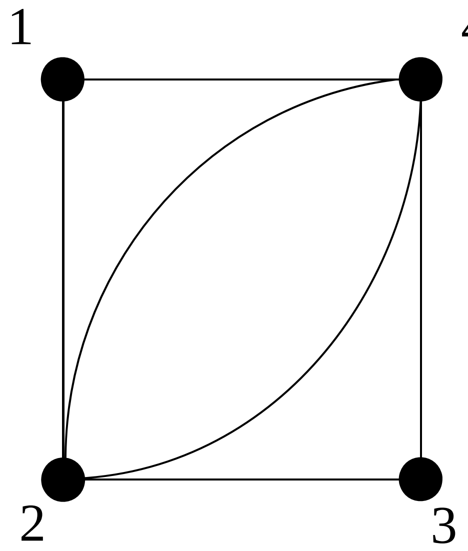


NEXT

1.4 グラフの行列表現

隣接行列 A (adjacency matrix):

節点間の隣接関係でグラフを表現.



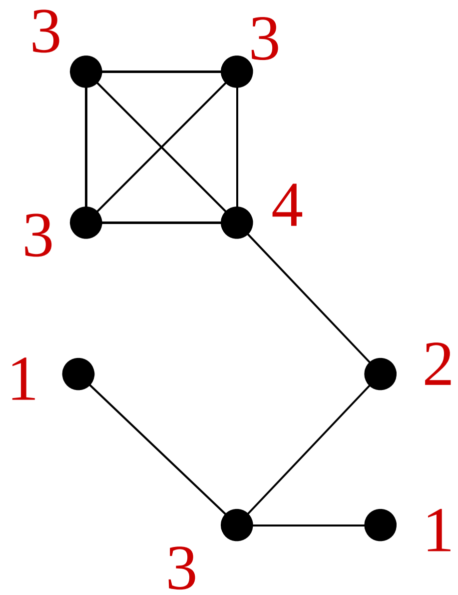
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

NEXT

1.5 握手定理

定理1.1:握手定理

全ての節点の次数を合計すれば偶数になる.

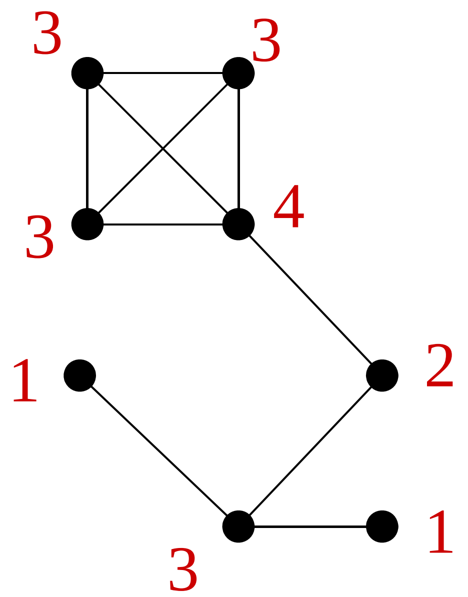


次数合計　20

NEXT

系1.2 :

どのグラフにも奇数次数の節点は偶数個ある.

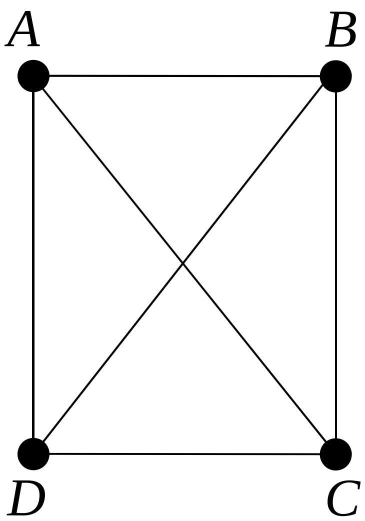


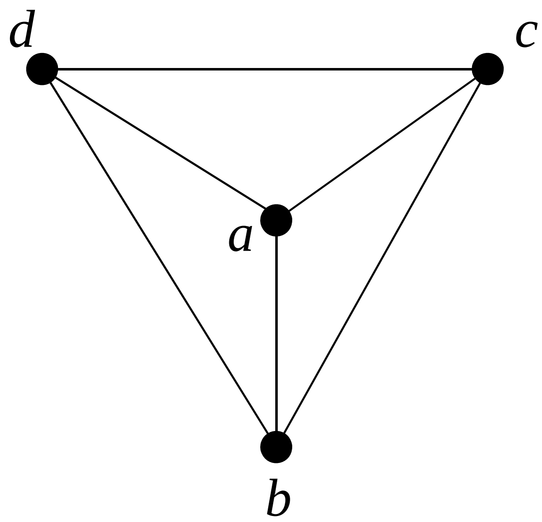
奇数次数　6個

NEXT

1.6　同型(isomorphic)

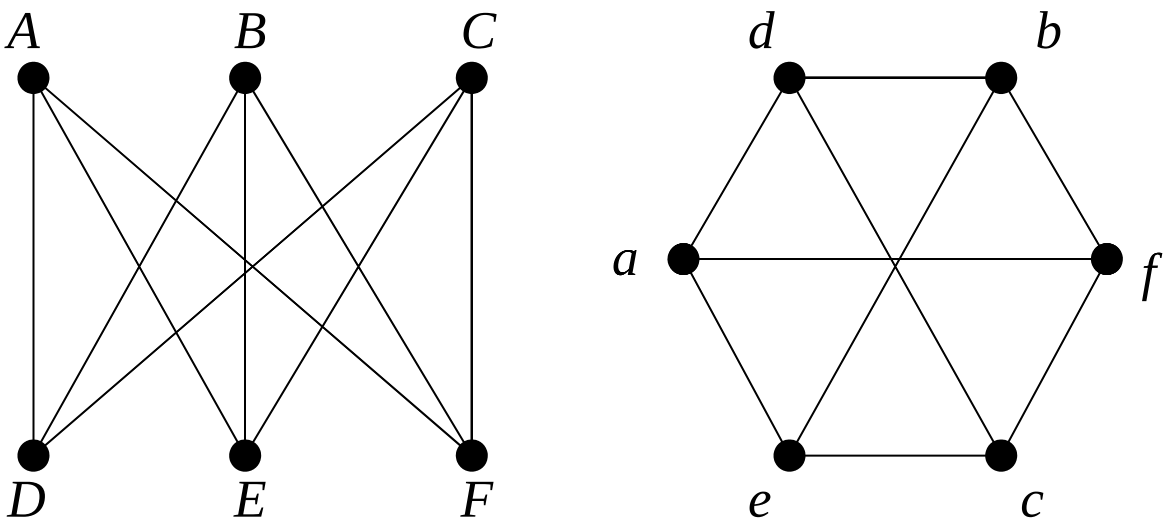
2 つのグラフ G_1 と G_2 の節点間に一対一対応があり，かつ，G_1 の任意の 2 点を結ぶ辺数が G_2 の対応する 2 点を結ぶ辺数に等しい時，G_1 と G_2 は同型という.





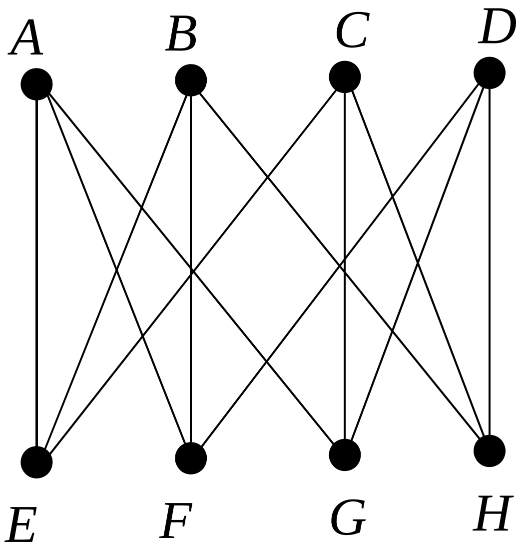
NEXT

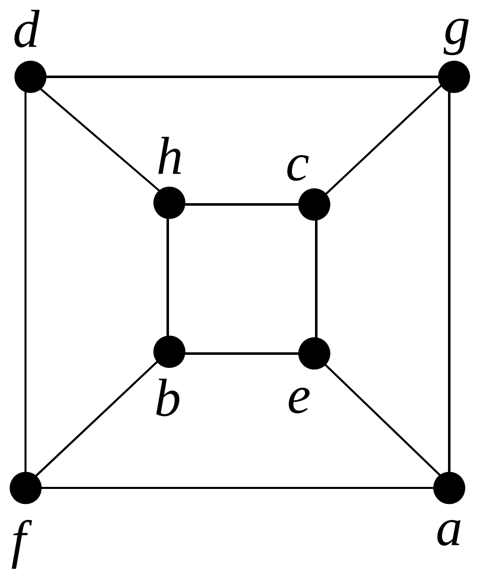
同型なグラフの例



NEXT

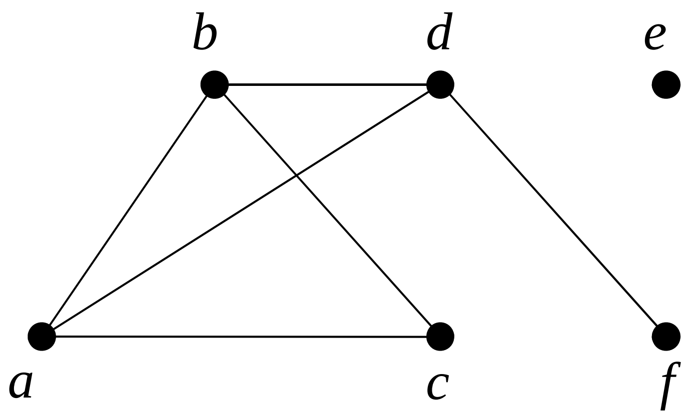
同型なグラフの例





NEXT

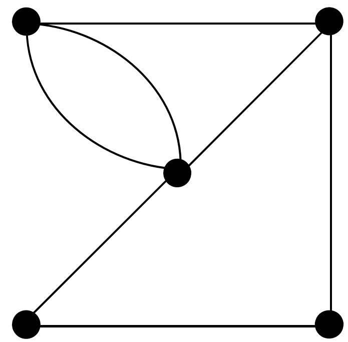
例題　次のグラフを集合表現で記述せよ.



$$G=(V, E)$$
$$V=\{a,b,c,d,e,f\}$$
$$E=\{ab,ac,ad,bc,bd,df\}$$

例題　次の隣接行列のグラフを描け.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



NEXT

例題　5個の節点と8本の辺を持つ次のグラフを描け.

(1)　単純グラフ.
(2)　ループが無い単純でないグラフ.
(3)　多重辺が無い単純でないグラフ.

例題　次の命題は真か偽か.

(1)　同型なグラフは同じ次数列を持つ.　　T
(2)　同じ次数列を持つグラフは同型である.　　F

NEXT

例題　次のグラフを描け

(1)　節点数が 6で次数列が 5,5,4,3,3,2 の単純グラフ.
(2)　節点数が 6で次数列が 5,5,5,5,3,3 の単純グラフ.
(3)　節点数が 7で次数列が 6,6,6,5,5,4,3 の単純グラフ.

(1)
```
5 5 4 3 3 2
  4 3 2 2 1
      2 1 1
          0
```

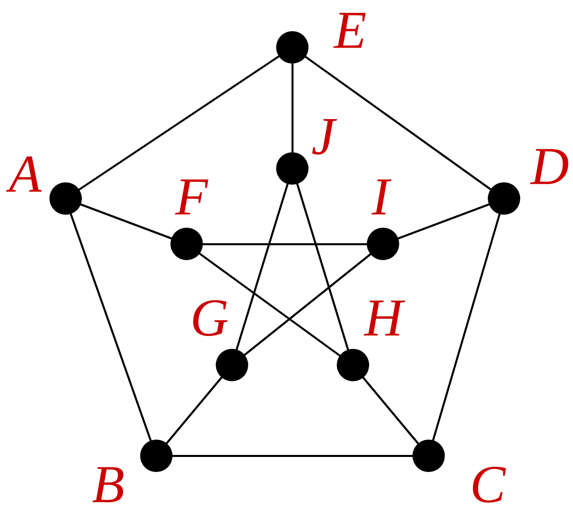
(2)
```
5 5 5 5 3 3
  4 4 4 2 2
      3 3 1 1
            2
```

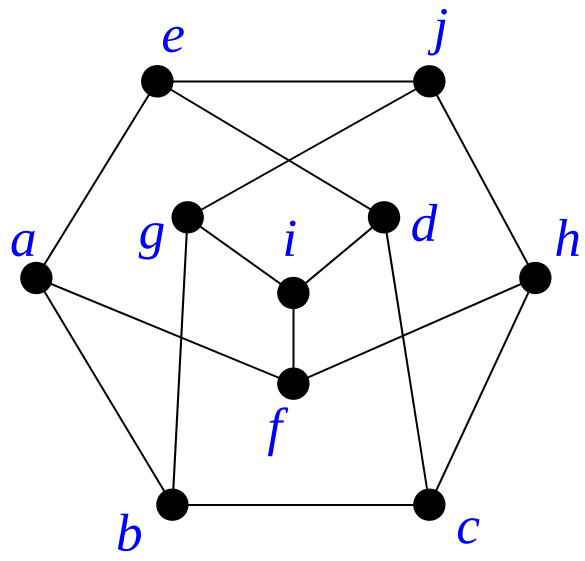
(3)
```
6 6 6 5 5 4 3
  5 5 4 4 3 2
    4 3 3 2 1
        2 2 1
            1
```

(2)(3)は描写不可

NEXT

例題　次の 2つのグラフは同型か.





同型

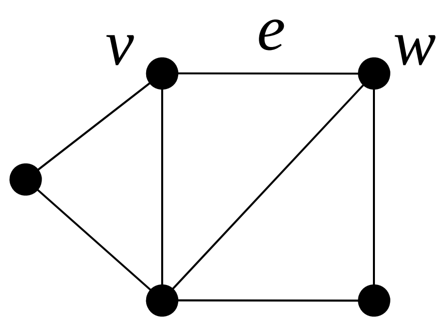
NEXT

11.7　除去(delete)と縮約(contraction)

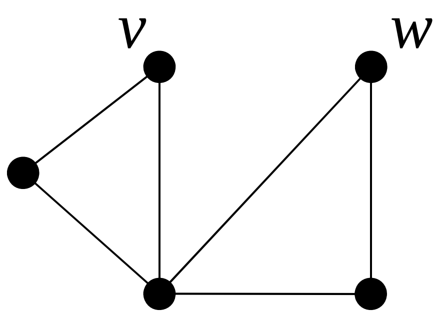
e の除去 : G-e　　G から辺 e を削除する.

v の除去 : G-v　　G から節点 v と v に接続する辺を削除する.

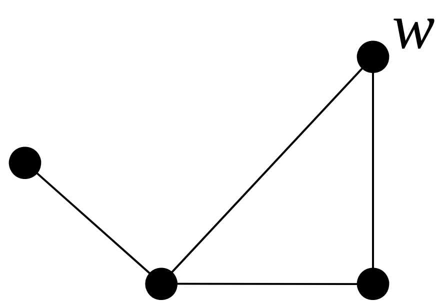
e の縮約 : G/e　　辺 e を短縮化し, 両端の節点を同一化する.



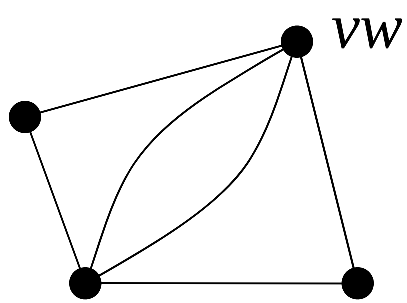
グラフG



G-e



G-v



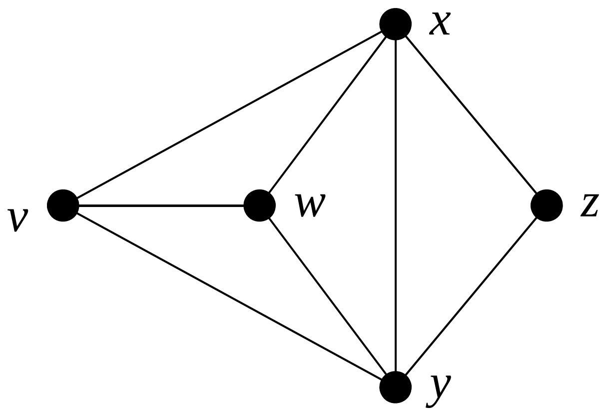
G/e

NEXT

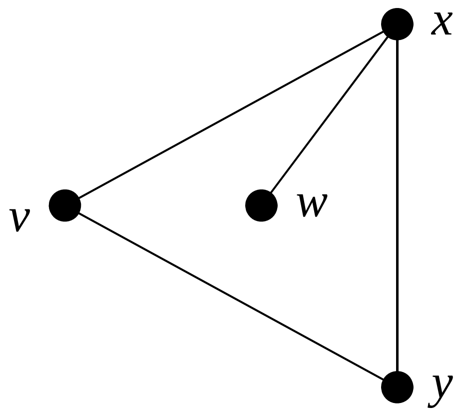
11.8 部分グラフ(subgraph)

$G=(V, E)$ の部分グラフ $G'=(V', E')$

G' の節点は全て V の，辺は全て E の一部であるグラフ.



グラフ G

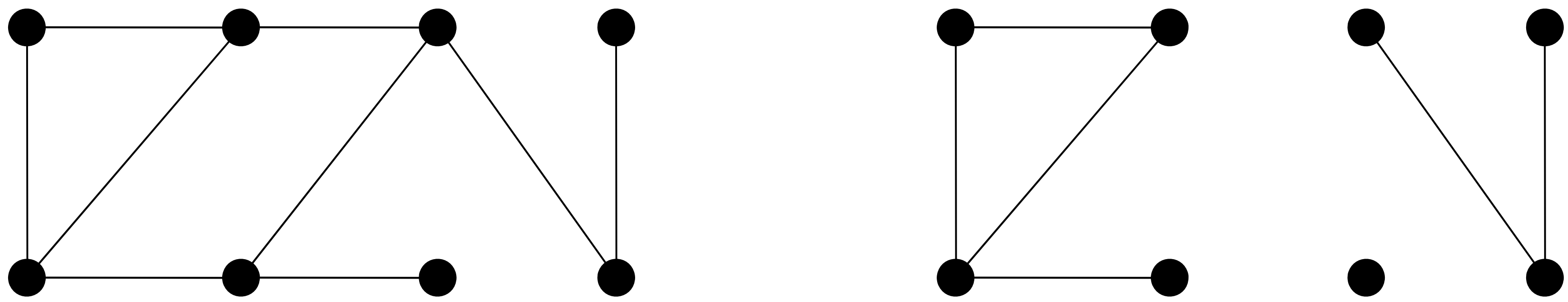


G の部分グラフ G'

NEXT

11.9　連結グラフ(connected graph)

全ての節点がつながっているひとかたまりのグラフ.



連結グラフ

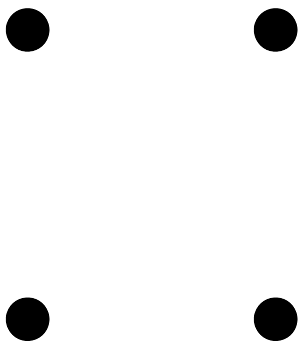
非連結グラフ

連結成分数は3

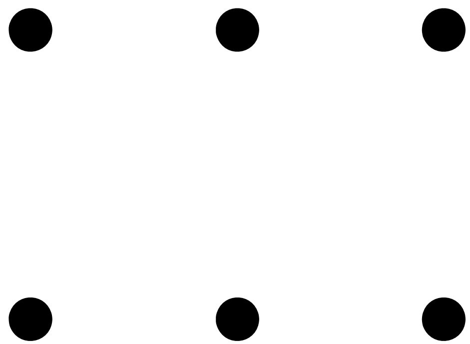
NEXT

11.10 空グラフ(null graph): N_n

孤立点だけで構成される辺を持たないグラフ.



N_4

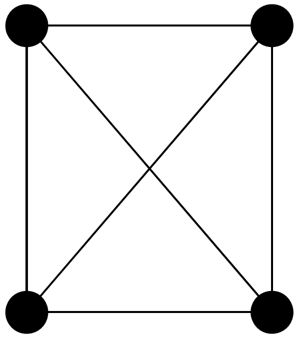


N_6

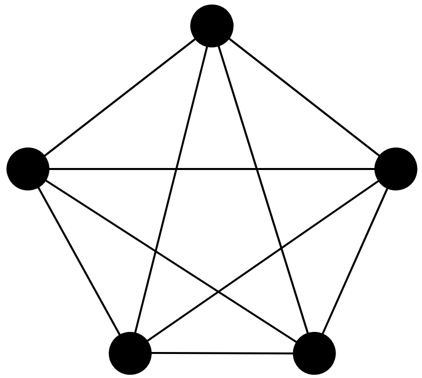
NEXT

11.11 完全グラフ(complete graph): K_n

異なる全ての 2節点間に辺が存在するグラフ.



K_4



K_5

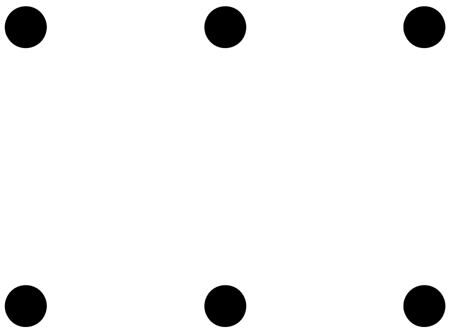
完全グラフ K_n の辺の本数: $|E(K_n)| = \dfrac{n(n-1)}{2}$

NEXT

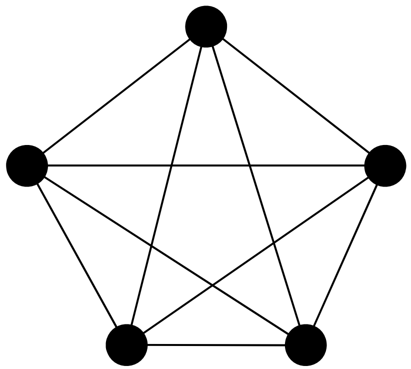
11.12 正則グラフ(regular graph)

どの節点の次数も同じグラフ.

空グラフは 0-正則グラフ.
完全グラフ K_n は $(n$-1)-正則グラフ.



N_6

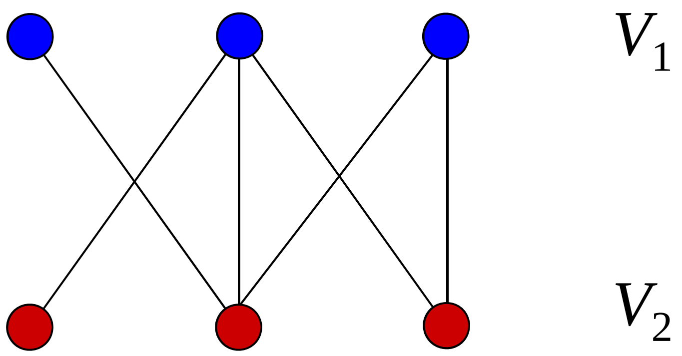


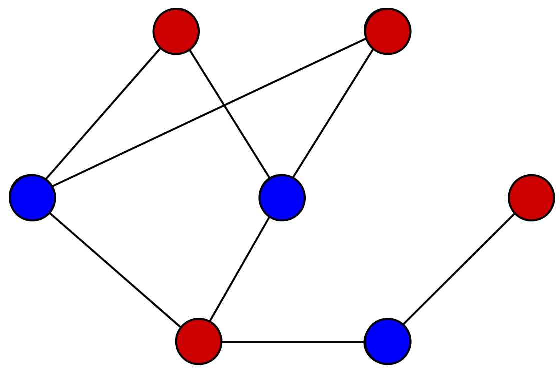
K_5

NEXT

11.13　二部グラフ(bipartite graph)

グラフ G の節点集合が V_1 と V_2 に分割され，G の全ての辺は V_1 と V_2 間の節点を結ぶグラフ.

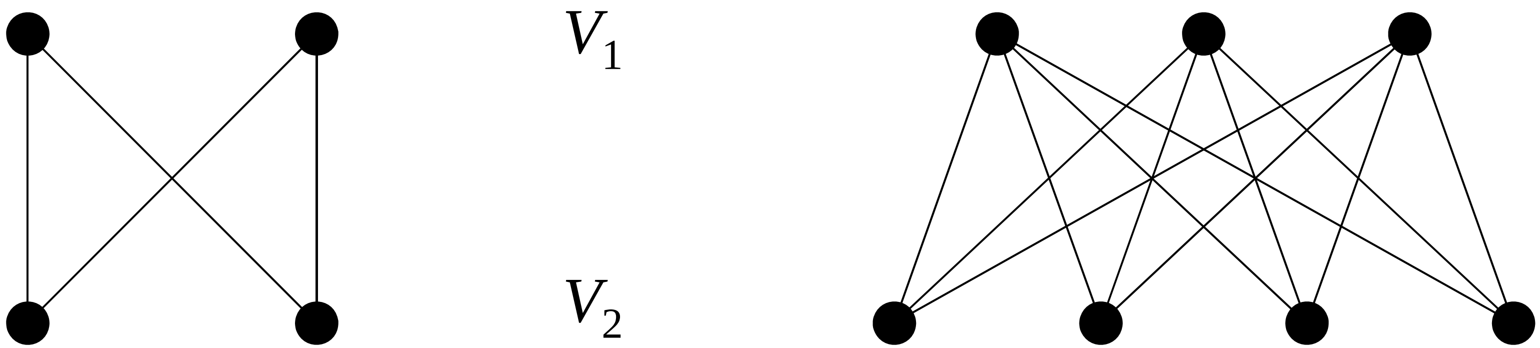




NEXT

11.14 完全二部グラフ(complete bipartite graph): $K_{n,m}$

V_1 の全ての節点が V_2 の全ての節点と結ばれている二部グラフ.



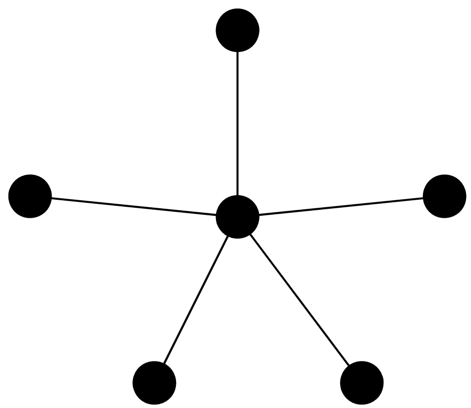
$K_{2,2}$ $K_{4,3}$

完全二部グラフ $K_{n,m}$ の辺の本数: $|E(K_{n,m})| = n \cdot m$

NEXT

11.15 星グラフ(star graph): S_n

$K_{1,n\text{-}1}$なる完全二部グラフ.



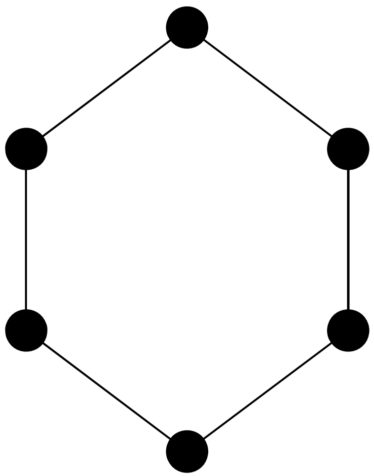
S_6

星グラフ S_n の辺の本数: $|E(S_n)| = n\text{-}1$

NEXT

11.16 閉路(circuit): C_n

次数 2の正則な連結グラフ.



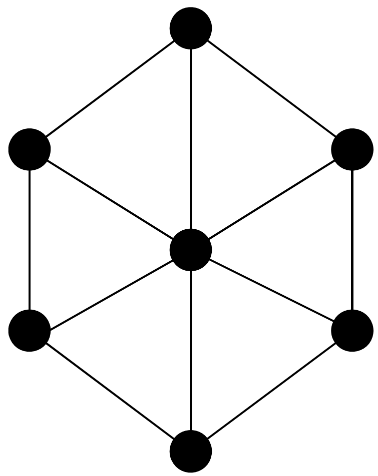
C_6

閉路 C_n の辺の本数: $|E(C_n)| = n$

NEXT

11.17 車輪(wheel): W_n

$C_{n\text{-}1}$に 1つ節点を加え，他の全節点と辺を結んだグラフ.



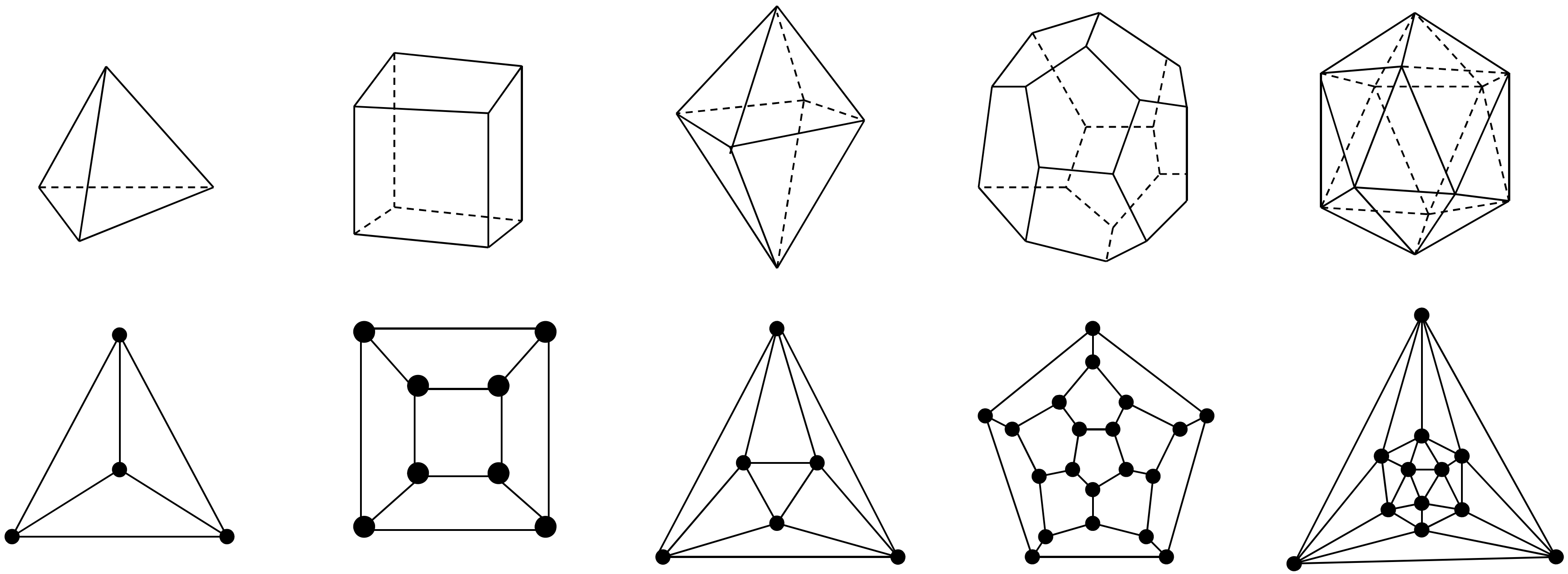
W_7

車輪 W_n の辺の本数 : $|E(W_n)| = 2(n\text{-}1)$

NEXT

11.18 プラトングラフ(Platonic graph)

正多面体より構成されたグラフ

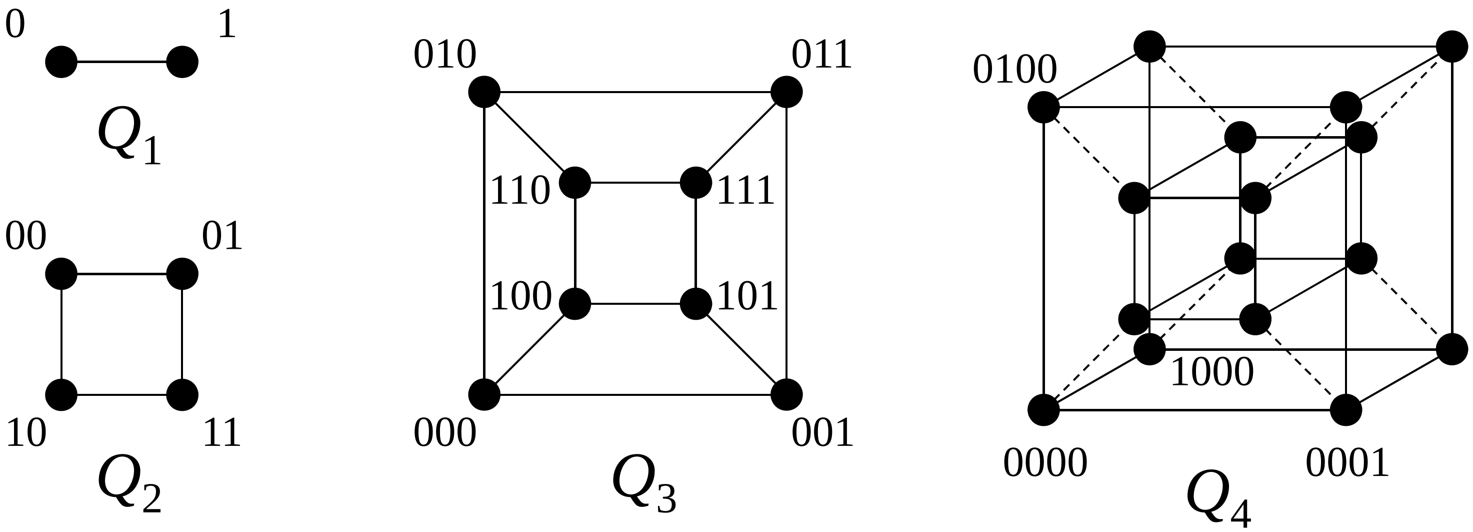


正4面体　正6面体　正8面体　正12面体　正20面体

NEXT

11.19　k 立方体: Q_k

k 桁の 2進数を節点に対応させ，1個だけビットの内容が異なる2進数に対応する節点間が辺で結ばれるグラフ.

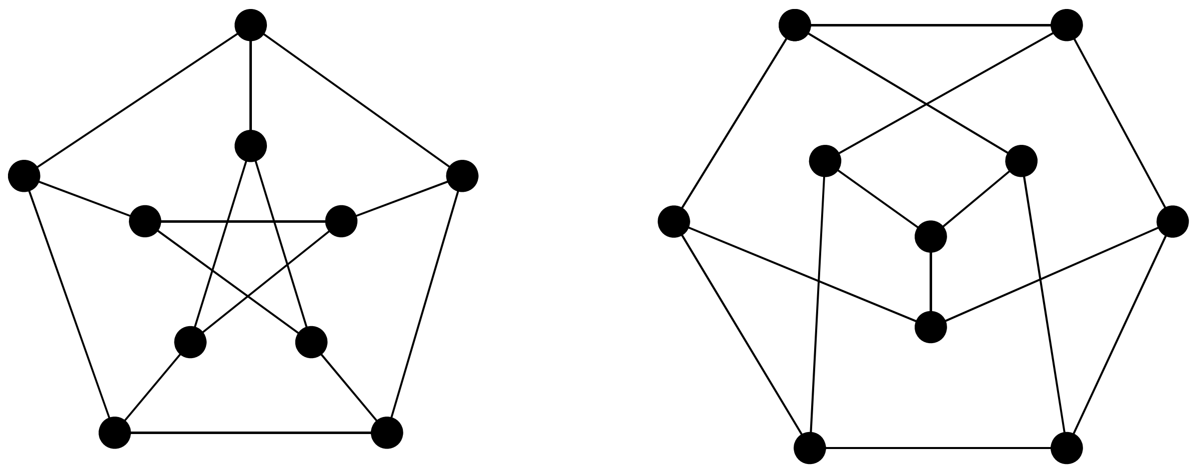


k立方体の節点の数: $|V(Q_k)| = 2^k$

k立方体の辺の本数: $|E(Q_k)| = k2^{k-1}$

NEXT

11.20 ペテルセングラフ(Petersen graph)

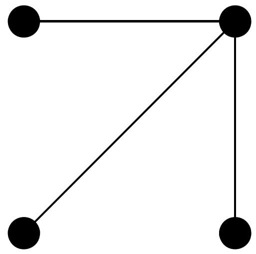


上記のどちらの形でも良いので暗記すること.

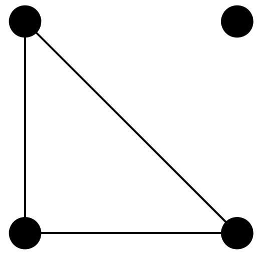
NEXT

11.21 補グラフ(complement graph): $\overline{G}$

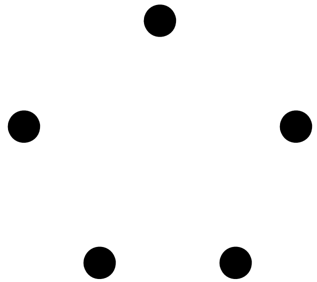
$G = (V(G), E(G))$ の補グラフとは節点集合 $V(G)$ をもち，G の隣接しない 2節点間に辺が存在するグラフ.



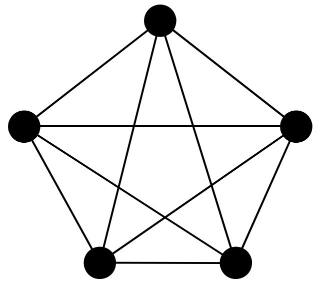
G



$\overline{G}$



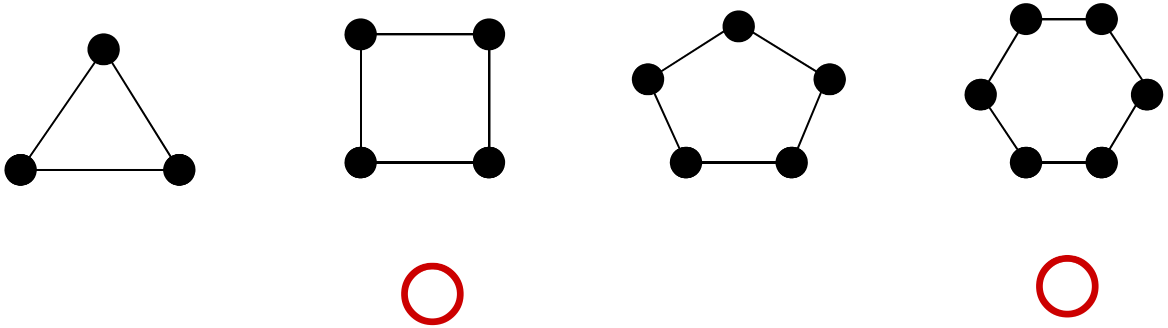
N_5



$\overline{N_5}$

NEXT

例題　次のどのグラフが$K_{3,3}$の部分グラフか.



例題　次のグラフを描け.

ANS

(1) N_5　(2) K_6　(3) $K_{2,4}$　(4) W_6　(5) $\overline{C_5}$

NEXT

例題　次のグラフに辺は何本あるか.

(1) K_{10}　(2) $K_{5,7}$　(3) ペテルセングラフ　(4) $\overline{W_7}$

45　35　15　9

例題　次のグラフを描け.

ANS

(1)　次数 5の正則グラフであるような二部グラフ.　$K_{5,5}$

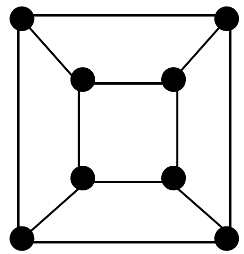
(2)　11個の節点を持つ 3正則グラフ.　描写不可

(3)　車輪である完全グラフ.　K_4

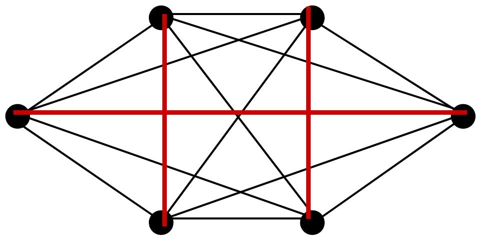
(4)　二部グラフであるようなプラトングラフ.　正6面体

NEXT

例題　8個の節点を持つ 3正則グラフを描け.



例題　次数 4の正則グラフで K_5,　$K_{4,4}$ 以外のグラフを描け.



ANS

例題　グラフ G に n 個の節点と m 本の辺があるとし, G の節点 v の次数は k であり, e を G の辺とする. この時, G-v, G-e, G/e はそれぞれ何個の節点と何本の辺を持つか.

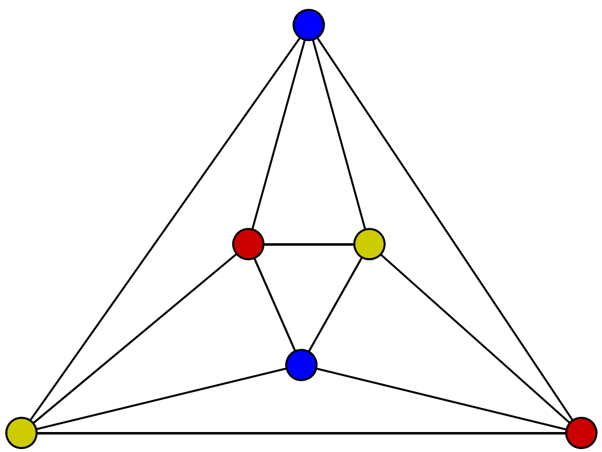
	節点数	辺数
G-v	n-1	m-k
G-e	n	m-1
G/e	n-1	m-1

NEXT

例題　完全三部グラフ $K_{r,s,t}$ とは 3つの節点集合からなり，異なる集合に属する 2つの節点は全て辺で結ばれているグラフである.

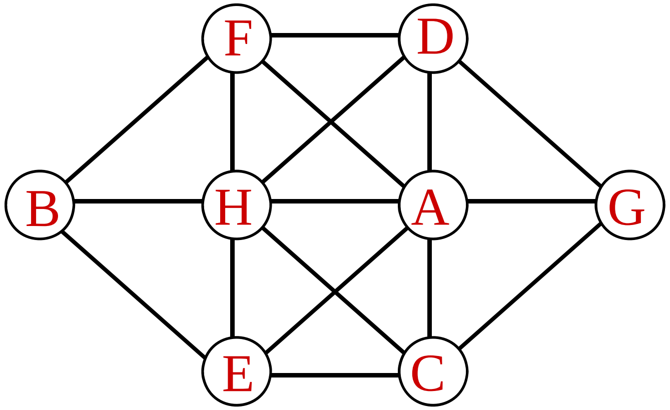
(1)　$K_{2,2,2}$ を描け.

(2)　$K_{3,4,5}$ には何本の辺があるか.　47



NEXT

例題　次のグラフの節点に A, B, C, D, E, F, G, H の文字を入れなさい．ただし，アルファベットの順番で隣にくる文字は，互いに隣接しないようにせよ．



ANS

NEXT

例題　G は単純グラフであり，2個以上の節点があるとする．この時，G には同じ次数の節点が 2個以上あることを示せ．

連結グラフ　$\overbrace{\bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \cdots \quad \bullet}^{n}$

次数は1～n-1なので，どこかの節点の次数は重複する．

非連結グラフ　$\overbrace{\bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \cdots \quad \bullet}^{n-1} \qquad \underset{0}{\bullet}$

次数は1～n-2なので，どこかの節点の次数は重複する．

鳩ノ巣原理 (pigeon-hole principle)

NEXT

鳩ノ巣原理

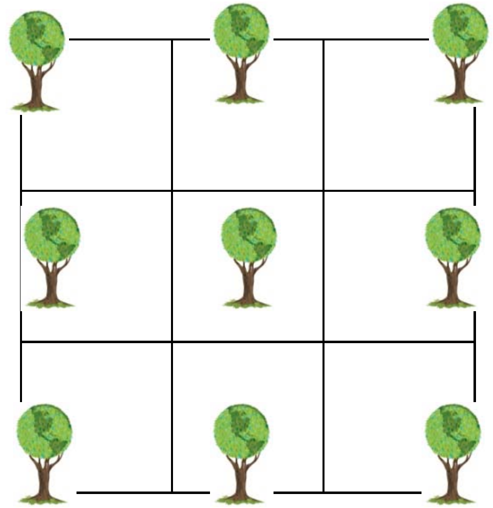
サイコロを振る回数を宣言して，サイコロを振る.
宣言した回数以内に同じ出目が2回以上出たら
勝ちである. 何回と宣言すればよいか？

当然，7回 （サイコロは 6通りの出目しかないから）

NEXT

鳩ノ巣原理

3m × 3mの土地に，どの2本も1.5m以上離れるように，10本の木を植えることは可能か？



9本の木が植えられるのは可能.

あと1本植えることができるか.

どれかのマスに2本以上木が存在しなければならない.

その時の2本の距離は最長で$\sqrt{2}$ =1.4142m.

よって，不可能.

NEXT

例題　それ自身の補グラフと同型な単純グラフは自己補対(self-complementary)であるという.

(1)　G が自己補対ならば, G の節点数は $4k$ or $4k+1$ であることを示せ.

(2)　4個, 5個の節点を持つ自己補対グラフを描け.

ANS

$$\frac{n(n-1)}{2} - m = m$$

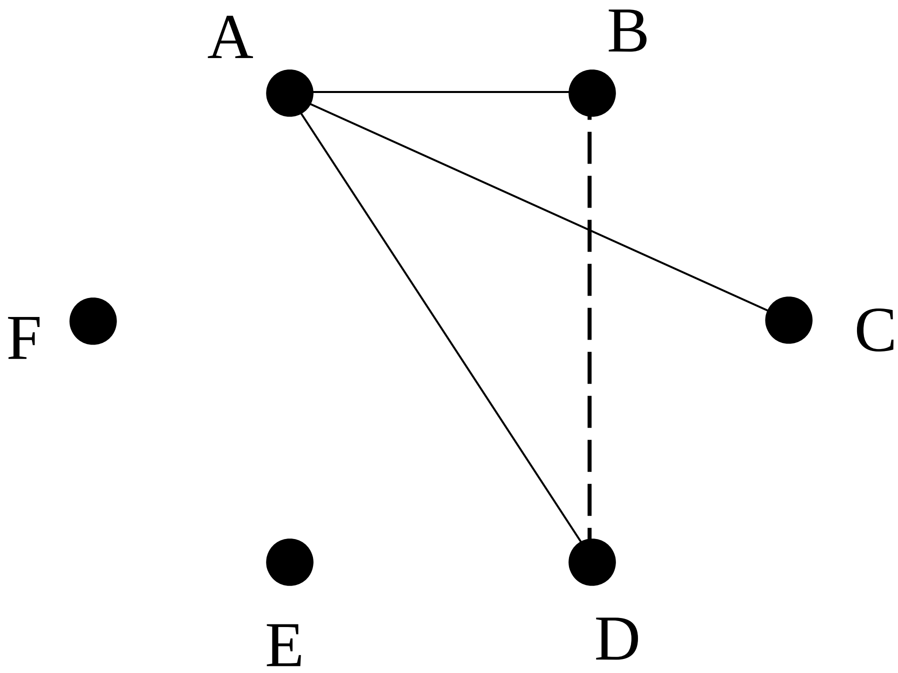
$$m = \frac{n(n-1)}{4}$$

$$\therefore n = 4k, 4k+1$$

NEXT

例題　6人の会合では，互いに知り合いの 3人組がいるか，そうでなければ互いに知り合いでない 3人組がいることを示せ．

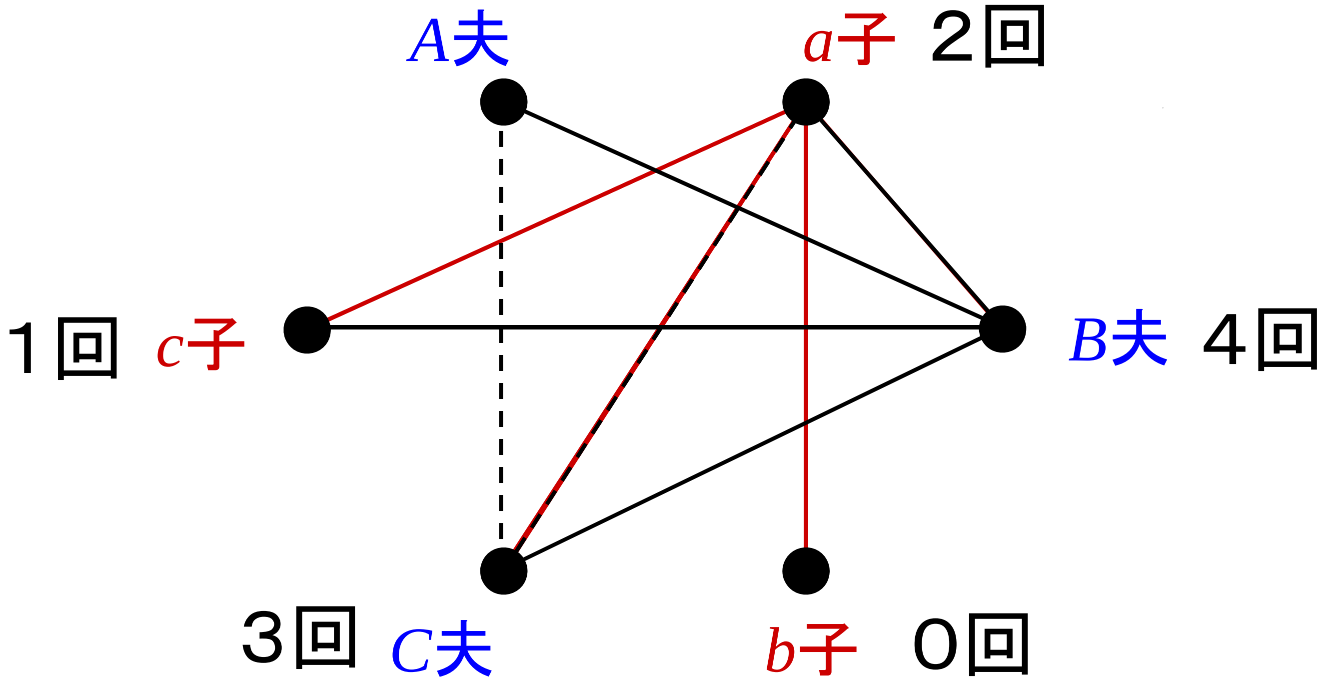
ANS



NEXT

例題　3組の夫婦がパーティーに参加し，おのおの握手を交わした．A夫以外の 5人はそれぞれ握手の回数が異なっていることがわかった．また，各人は同じ人と 2度以上握手はしておらず，各夫婦間でも握手はしていない．この時，A夫の奥さん a子は何回握手をしたのか．

ANS



END