周辺単純支持された異方性偏平パネルの周波数応答と制御

成澤　哲也*　山口　恭侑**　野村　亮平**

Frequency Response and Control of Simply Supported Anisotropic Curved Panels

Tetsuya NARISAWA, Kyohei YAMAGUCHI, Ryohei NOMURA

Abstract - Author's studied during last 5 years are outlined. Contents of the studies are the structural and control design of laminated composite panels. Those studies were actively supported by TMCT and KNCT. Deformation behavior and vibration responses of the constructures made by composite anisotropic materials are easily controlled by determining shell shapes or fiber orientation. In this report, the first, the structural design for improvement of the natural frequency and changing the vibration mode with the Ritz's method is showed. The next, the control design for damping properties of system with the optimal control theory. The third, the direction of studies within the next five years is showed.

Key Word: Shell Theory, Ritz's Method, Composite Materials, FRP, Vibration Control

1．はじめに

本報では釧路高専および都立高専において行った積層シェル構造の振動と制御に関する５年間の研究成果を整理する。また，平成17年度釧路高専校長裁量経費等により日本機械学会にて発表した内容も含めて，今後の研究の方向性を探る。

さて，異方性複合材料を用いたシェル構造は要求される構造剛性に応じて曲率を決定したり，異方性の主軸方向の選定あるいはラミナを積層させることで変形挙動や振動応答をコントロールできる(1)。

本報ではまず，繊維強化プラスチック複合材料(FRP)で作られた平板に対し，わずかに曲率を与えて剛性を高めた上で，異方性主軸の違うラミナを積層させることで，振動モードを改善させるパネル構造の設計法について説明する。次に，実用的な最適レギュレータ理論による制御系設計を行うことで，減衰特性の改善を行う方法について説明する(2)。

2．構造系設計の方法

図１に示すように，物体座標系に(0-*xyz*)，強化繊維方向の主軸方向を１とする繊維座標系に(0-123)をとる。また，物体座標系の変位成分をu，v，wとする。ラミナの繊維方向はx軸を基準にθにとる。R_yは曲率半径である。

まず，異方性弾性論に基づき，次のように直交異方性材の構成方程式を考える。

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q_{11} & Q_{12} & 0\\ & Q_{22} & 0\\ symm. & & Q_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \gamma_{12}\end{Bmatrix}\quad(1)$$

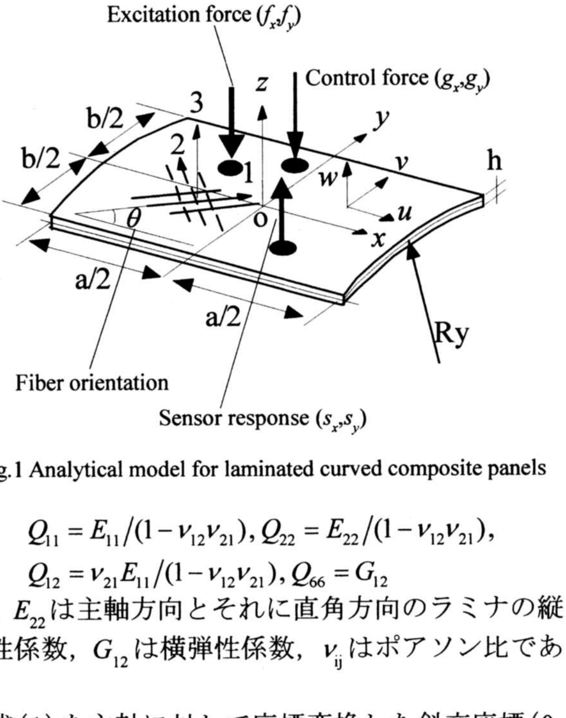


Fig.1 Analytical model for laminated curved composite panels

$$Q_{11}=E_{11}/(1-\nu_{12}\nu_{21}),\ Q_{22}=E_{22}/(1-\nu_{12}\nu_{21}),$$
$$Q_{12}=\nu_{21}E_{11}/(1-\nu_{12}\nu_{21}),\ Q_{66}=G_{12}$$

E_{11}，E_{22}は主軸方向とそれに直角方向のラミナの縦弾性係数，G_{12}は横弾性係数，ν_{ij}はポアソン比である。

式(1)を主軸に対して座標変換した斜交座標(0-*xyz*)系の構成方程式は以下となる。

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16}\\ & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26}\\ symm. & & \bar{Q}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}\quad(2)$$

$$\bar{Q}_{11}=Q_{11}l^2+2(Q_{22}+2Q_{12})l^2m^2+Q_{22}m^4,$$
$$\bar{Q}_{22}=Q_{11}m^2+2(Q_{12}+2Q_{66})l^2m^2+Q_{22}l^4,$$
$$\bar{Q}_{66}=(Q_{11}+Q_{22}-4Q_{66})l^2m^2+Q_{12}(l^4+m^4),$$
$$\bar{Q}_{12}=(Q_{11}+Q_{22}-2Q_{12}-2Q_{66})l^2m^2+Q_{22}m^4,$$
$$\bar{Q}_{16}=(Q_{11}-Q_{12}-2Q_{66})l^3m+(Q_{12}-Q_{22}+2Q_{66})lm^3,$$

＊釧路高専機械工学科
＊＊釧路高専機械工学科学生

$$\bar{Q}_{26}=(Q_{11}-Q_{12}-2Q_{66})lm^3+(Q_{12}-Q_{22}+2Q_{66})l^3m,$$
$$l=\cos\theta, m=\sin\theta$$

ドンネルのシェル理論に基づく任意点変位（u, v, w）と中央面変位（u^0, v^0, w^0）の関係から，任意ひずみ$\boldsymbol{\varepsilon}$を次のように，中央面のひずみ$\boldsymbol{\varepsilon^0}$と曲率$\boldsymbol{\kappa}$に関連付けることができる（付録１）。

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u^0}{\partial x}-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\varepsilon_x^0+z\kappa_x,$$
$$\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{w}{R_y}=\frac{\partial v^0}{\partial y}-z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{w}{R_y}=\varepsilon_y^0+z\kappa_y,$$
$$\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u^0}{\partial y}+\frac{\partial v^0}{\partial x}-2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=\gamma_{xy}^0+z\kappa_{xy}, \quad (3)$$
$$\kappa_x=-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \kappa_y=-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \kappa_{xy}=-2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$$

ここで，ひずみエネルギUと運動エネルギTを，

$$U=\frac{1}{2}\int_0^b\int_0^a\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}^0\\ \boldsymbol{\kappa}\end{Bmatrix}^T\left[\begin{array}{c|c}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\ \hline \boldsymbol{B}&\boldsymbol{D}\end{array}\right]\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}^0\\ \boldsymbol{\kappa}\end{Bmatrix}dxdy,$$
$$T=\frac{1}{2}I\int_0^b\int_0^a(\dot{u}^2+\dot{v}^2+\dot{w}^2)dxdy, \quad (4)$$
$$\left\{\boldsymbol{\varepsilon}^0\right\}=\left\{\varepsilon_x^0 \quad \varepsilon_y^0 \quad \gamma_{xy}^0\right\}^T, \left\{\boldsymbol{\kappa}\right\}=\left\{\kappa_x \quad \kappa_y \quad \kappa_{xy}\right\}^T$$

と定義する。積層理論によると伸直剛性A_{ij}，カップリング剛性B_{ij}，曲げ剛性D_{ij}，そして，慣性については回転慣性を省略した単位幅当たりの並進慣性Iは以下のように表せる。

$$\left[A_{ij},\quad B_{ij},\quad D_{ij}\right]=\sum_{i=1}^{N}\int_{h_{i-1}}^{h_i}\bar{Q}_{ij}^{(i)}\left[1,\quad z,\quad z^2\right]dz,$$
$$I=\sum_{i=1}^{N}\int_{h_{i-1}}^{h_i}\rho^{(i)}dz,\quad h=\sum_{i=1}^{N}\int_{h_{i-1}}^{h_i}(h_i-h_{i-1})dz \quad (5)$$

Nはラミナの層数，h_iは中立面からi番目のラミナの底面までの距離，各層の厚さはh_i-h_{i-1}である。また，$\bar{Q}_{ij}^{(i)}$はi番目のラミナの繊維方向の縦弾性係数，せん断弾性係数，ポアソン比および繊維配角より式(2)に基づいて求まる。

ここで汎関数に次のラグランジ関数Lを用いる。

$$L=T_{\max}-U_{\max} \quad (6)$$

$T_{\max}$は運動エネルギ，$U_{\max}$はひずみエネルギの最大値である。系が線形で調和振動する場合は変数分離形で以下のように表す。

$$u^0=U^0(x,y)e^{i\omega t},$$
$$v^0=V^0(x,y)e^{i\omega t}, \quad (7)$$
$$w=W(x,y)e^{i\omega t}$$

ただし，ωは固有円振動数，tは時間である。式(4)から$T_{\max}$と$U_{\max}$を求め，ラグランジ関数Lを最大未知振幅U^0, V^0, Wで表しておく。

ここに，リッツ法に用いるためこのU^0, V^0, Wの試験関数として，幾何学的境界条件を満足する次のベキ級数を採用する。

$$U^0(x,y)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}a_{ij}\phi_{ij}^u(x,y),$$
$$V^0(x,y)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}b_{ij}\phi_{ij}^v(x,y), \quad (8)$$
$$W(x,y)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}c_{ij}\phi_{ij}^w(x,y)$$

i, jは展開項数であり有限個nで打ち切ることで近似解となる。a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}は未知定数である。

次のラグランジ関数Lの停留条件，

$$\left\langle\frac{\partial L}{\partial a_{ij}},\frac{\partial L}{\partial b_{ij}},\frac{\partial L}{\partial c_{ij}}\right\rangle=\langle 0,0,0\rangle,(i,j=0\cdots n) \quad (9)$$

から次の固有方程式（同次式）が得られる。

$$\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}^{aa}&\boldsymbol{K}^{ab}&\boldsymbol{K}^{ac}\\ &\boldsymbol{K}^{bb}&\boldsymbol{K}^{bc}\\ symm.&&\boldsymbol{K}^{cc}\end{bmatrix}-\omega^2\begin{bmatrix}\boldsymbol{M}^{aa}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\\ &\boldsymbol{M}^{bb}&\boldsymbol{0}\\ symm.&&\boldsymbol{M}^{cc}\end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix}\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{c}\end{Bmatrix}=\boldsymbol{0} \quad (10)$$

ここで$\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{M}$はそれぞれ剛性，慣性マトリックスである[3]。上式が有意な解を持つための条件，

$$\left|\boldsymbol{K}-\lambda\boldsymbol{M}\right|=\boldsymbol{0};\lambda=\omega^2 \quad (11)$$

から得られる振動数方程式を代数的に解き，固有円振動数ωと対応する固有モードを決定する。

３．制御系設計の方法

古典積層理論を用いれば，非対称積層偏平パネルの曲げ振動の微分方程式は次式で表される。

$$L(w)+I\ddot{w}=p \quad (12)$$

$p(x,y,t)$はパネルに作用する外力，$w(x,y,t)$はパネルのたわみ，$L(\,)$はパネルの静的曲げ問題の微分演算子であり，

$$L(\,)=D_{11}\frac{\partial^4(\,)}{\partial x^4}+2(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^4(\,)}{\partial x^2\partial y^2}+D_{22}\frac{\partial^4(\,)}{\partial y^4}$$
$$+4D_{16}\frac{\partial^4(\,)}{\partial x^3\partial y}+4D_{26}\frac{\partial^4(\,)}{\partial x\partial y^3}-(\frac{B_{12}}{R_y}-B_{11})\frac{\partial^2(\,)}{\partial x^2}$$
$$-(\frac{B_{22}}{R_y}-B_{12})\frac{\partial^2(\,)}{\partial y^2}-2(\frac{B_{26}}{R_y}-B_{16})\frac{\partial^2(\,)}{\partial x\partial y}-\frac{A_{12}}{R_y}(\,) \quad (13)$$

のようになる。上式に含まれるA_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, Iについては式(5)に準ずる。

さて，パネルへのk点での励振力$f_k(t)$を(fx_k,fy_k)，制御力$g_l(t)$を(gx_l,gy_l)に作用するときの外力$p(x,y,t)$はデルタ関数を用いて次のように表現できる。

$$p(x,y,t)=\sum_{k=1}^{\alpha}f_k(t)\delta(x-fx_k)\delta(y-fy_k)$$
$$+\sum_{l=1}^{\beta}g_l(t)\delta(x-gx_l)\delta(y-gy_l) \quad (14)$$

近似解として，一般化変位 $q_i(t)$ とリッツ解 $\tilde{W}_i(x,y)$ を用いて以下でモード展開する。

$$w(x,y,t)=\sum_{i=1}^{n}q_i(t)\tilde{W}_i(x,y) \quad (15)$$

これを式(13)に代入，モードの直交性を適用し，モード減衰を加えると離散化モード方程式を得る。

$$m_i\ddot{q}_i(t)+c_i\dot{q}_i(t)+k_iq_i(t)=\sum_{k=1}^{\alpha}F_{ik}f_k(t)+\sum_{l=1}^{\beta}G_{il}g_l(t) \quad (16)$$

m_i, c_i, k_iはそれぞれモード質量，モード減衰係数，モード剛性，またF_{ik}, G_{il}はモード励振力行列，モード制御力行列であり，その成分を付録2に示す。

さらに，付録3に示す多点励振，多点制御の場合を参考にして，1点励振(α=1)，1点制御(β=1)系の場合の状態方程式は，

$$\begin{Bmatrix}\dot{q}_1\\ \vdots\\ \dot{q}_n\\ \ddot{q}_1\\ \vdots\\ \ddot{q}_n\end{Bmatrix}=\left[\begin{array}{c|c}\begin{bmatrix} & & \\ & \boldsymbol{0} & \\ & & \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} & & \\ & \boldsymbol{I} & \\ & & \end{bmatrix}\\ \hline \begin{bmatrix}-\omega_1^2 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & -\omega_n^2\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}-2\varsigma_1\omega_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & -2\varsigma_n\omega_n\end{bmatrix}\end{array}\right]$$

$$\times\begin{Bmatrix}q_1\\ \vdots\\ q_n\\ \dot{q}_1\\ \vdots\\ \dot{q}_n\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ F_1/m_1\\ \vdots\\ F_n/m_n\end{Bmatrix}f+\begin{Bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ G_1/m_1\\ \vdots\\ G_n/m_n\end{Bmatrix}g \quad (17)$$

となり，まとめて以下となる。

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{b}f(t)+\boldsymbol{e}g(t),$$

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{q}(t)\\ \dot{\boldsymbol{q}}(t)\end{Bmatrix},\ \boldsymbol{q}(t)=\{q_1(t),\cdots,q_n(t)\}^T,$$

$$\boldsymbol{A}=\left\{\begin{array}{c|c}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\\ \hline \boldsymbol{\Omega} & \boldsymbol{\Lambda}\end{array}\right\},\ \boldsymbol{\Omega}=diag(-\omega_1^2,\cdots,-\omega_n^2),$$

$$\boldsymbol{\Lambda}=diag(-2\varsigma_1\omega_1,\cdots,-2\varsigma_n\omega_n),\ \omega_i=\sqrt{k_i/m_i}$$

$$\boldsymbol{b}=\left\{\frac{\boldsymbol{0}}{\boldsymbol{\Phi}}\right\},\ \boldsymbol{\Phi}=\{F_1/m_1,\cdots,F_n/m_n\}^T,\ F_i=\tilde{W}_i(fx,fy),$$

$$\boldsymbol{e}=\left\{\frac{\boldsymbol{0}}{\boldsymbol{\Gamma}}\right\},\ \boldsymbol{\Gamma}=\{G_1/m_1,\cdots,G_n/m_n\}^T,\ G_i=\tilde{W}_i(gx,gy) \quad (18)$$

さて，応答$y(t)$をセンサSの位置(sx,sy)の変位wにとる場合，出力方程式は次式となる。

$$y(t)=\sum_{i=1}^{n}q_i(t)\tilde{W}_i(sx,sy)=\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t),$$

$$\boldsymbol{c}=\left\{\tilde{W}_1(sx,sy),\cdots,\tilde{W}_n(sx,sy),\overbrace{0,\cdots,0}^{n}\right\} \quad (19)$$

ここで，レギュレータの設計を行う。まず，モードごとに変位と速度に応じた状態量を次のようにフィードバックすることを考える。

$$g_i(t)=-k_pq_i(t)-k_v\dot{q}_i(t)$$
$$=-\{k_{ip}\quad k_{iv}\}\begin{Bmatrix}q_i(t)\\ \dot{q}_i(t)\end{Bmatrix}=-\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{x}_i(t) \quad (20)$$

フィードバックゲインベクトル$\boldsymbol{k}$を作成して制御力$g(t)$を決定する（n次システムのフィードバックゲイン行列の作成については付録4参照)。付録4式を式(18)に代入し，

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\left[\boldsymbol{A}-\boldsymbol{e}\boldsymbol{k}\right]\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{b}f(t) \quad (21)$$

の状態方程式を得る。ここで，$\boldsymbol{k}$を変えることで系の固有値と減衰を変更できる。以上のことから，sをラプラス演算子，$\boldsymbol{I}$を単位行列$(n\times n)$とすると，系の閉ループ伝達関数H_fは以下となる。

$$H_f(s)=\frac{Y(s)}{F(s)}=\boldsymbol{c}\left[s\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{e}\boldsymbol{k})\right]^{-1}\boldsymbol{b} \quad (22)$$

よって，時刻歴応答$y(t)$は入力$f(t)$に対応する状態ベクトル$\boldsymbol{x}(t)$,

$$\boldsymbol{x}(t)=\exp\left(\left[\boldsymbol{A}-\boldsymbol{e}\boldsymbol{k}\right]t\right)\boldsymbol{x}(0)$$
$$+\int_0^t\exp\left\{\left[\boldsymbol{A}-\boldsymbol{e}\boldsymbol{k}\right](t-\tau)\right\}\boldsymbol{b}g(\tau)d\tau \quad (23)$$

を式(19)に代入することで求まる。また，$\boldsymbol{e}=\boldsymbol{0}$とおくことで非制御系応答となる。

ここで，最適レギュレータ理論を適用し，次の二次形式評価関数Jを最小とする制御力$g(t)$を与える$\boldsymbol{k}$の決定問題とする。

$$J=\int_0^{\infty}\left[\boldsymbol{x}(t)^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t)+r^2g(t)\right]dt \quad (24)$$

このJを最小にする$\boldsymbol{k}$は無限制御時間の場合以下で与えられる。

$$\boldsymbol{k}=r^{-1}\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{P} \quad (25)$$

行列$\boldsymbol{P}$は以下に示すリカッチ型代数方程式を解くことで求まる。

$$\boldsymbol{PA}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}\boldsymbol{b}r^{-1}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{0} \quad (26)$$

式中のパラメータ$\boldsymbol{Q}(n\times n)$と$r(1\times 1)$はそれぞれ振動エネルギーと制御エネルギーの重みであり，その比率は設計要求に応じて決定する。

4．計算結果および考察

簡単のため，変数ξ, ηを用いて無次元化する。

$$\xi=\frac{2x}{a}-1,\ \eta=\frac{2y}{b}-1,\ \frac{\partial()}{\partial x}=\frac{2}{a}\frac{\partial()}{\partial\xi},\ \frac{\partial()}{\partial y}=\frac{2}{b}\frac{\partial()}{\partial\eta} \quad (27)$$

また，式(8)のϕ_{ij}^u, ϕ_{ij}^v, ϕ_{ij}^wを次べき関数を用いて表す。

$$\phi_{ij}^u(\xi,\eta)=\xi^i\eta^j(\xi+1)^{\alpha1}(\xi-1)^{\alpha2}(\eta+1)^{\alpha3}(\eta-1)^{\alpha4},$$
$$\phi_{ij}^v(\xi,\eta)=\xi^i\eta^j(\xi+1)^{\beta1}(\xi-1)^{\beta2}(\eta+1)^{\beta3}(\eta-1)^{\beta4},$$
$$\phi_{ij}^w(\xi,\eta)=\xi^i\eta^j(\xi+1)^{\gamma1}(\xi-1)^{\gamma2}(\eta+1)^{\gamma3}(\eta-1)^{\gamma4}$$

(28)

ここで，$\alpha 1 \sim \gamma 4$は長方形板の幾何学的境界条件を示すインデックスであり，0(自由支持辺：F)，1(単純支持辺：S)，2(固定支持辺：C)をとる。このインデックスにより境界条件の組み合わせが容易になる（付録5)。

さて，リッツ法による計算では式(15)の試験関数として級数を特定の項で打ち切って用いる。そこで，打ち切り評価として，4種類の境界条件をもつ正方形板(a/b=1)に対し式(8)の項数nを変化させ，以下の無次元化振動数Ωの収束状況を調べた[4]。

$$\Omega=\omega a^2 \Big/ \sqrt{\rho / D_0}, \quad D_0 = E_{11}h^3/12(1-\nu_{12}\nu_{21}) \qquad (29)$$

ラミナの材料定数Graphite/Epoxy(G/E)は以下とした[5]。

$$E_{11}=138\mathrm{GPa},\ E_{22}=8.06\mathrm{GPa},\ G_{12}=7.1\mathrm{GPa},\ \nu_{12}=0.3,\ \rho=1570\mathrm{Kg/m^3}$$

表1はFFFF，SSSS，CCCC，CSSF支持で[30/-30/30]非対称積層条件での$\Omega_1 \sim \Omega_5$の計算結果である。拘束のゆるいFFFF，SSSSの場合に収束が比較的遅く，CCCCではn=6程度で十分収束している。これらの結果より，以降の計算ではn=8を採用した。

図2に対辺が単純支持（SSFF）された，[θ/-θ/θ]積層板の振動モードを示す。繊維配向θによりモードの節線が複雑に変化することが分かる[6]。このモード確認を経て，加振，観測，制御点を選定することとした。

図3はシェルの偏平率(b/Ry)と固有振動数との関係である。アングルプライ単層正方形板をSSSS(S2)条件で計算した。平板の場合は，30°，45°配向で$\Omega_1 \sim \Omega_3$を比較的高くできると言える。また，曲率はx軸方向の剛性強化の効果がある。一方，繊維配向θが45°以上はy軸方向剛性強化につながる。特に，Ω_1についてはその効果が大きく90°配向により3倍以上の振動数向上効果がある[7]。

ここで制御対象としてθ=45°，b/Ry=0.01を選定し，そのモードを図4左に示す。(m,n)は繊維方向基準の半波数を表すモードナンバーである。図中黒点a～dは各モードの最大振幅点（標準化して1)，直線は節線，矢印は繊維方向を示す。また，図4右に各点が各モードへの励振，観測，制御性の程度を◎，○，×の記号で示した。a点は1，4次モードについて可観測可制御，2，3次モードについては不可観測不可制御点である。a～d点すべてが可観測可制御点とはならないため，次のように，4次までのモード関数の積をマップ関数と定義した。

$$map=\prod_{i=1}^{n=4} \tilde{W}_i(\xi,\eta) \qquad (30)$$

このマップ関数に基づいて，図5のように励振点をe(ξ,η)=(0.5,0)，観測および制御点をf(0,0.5)に選んだ。図6はe点に対するf点の周波数応答ゲイン曲線である。各モード減衰比はξ=0.001, 0.01, 0.1に与えた。4次モードまでの励振の実現と，ω_3とω_4の接近性が読みとれる。また，減衰比によらずω_1，ω_2の卓越性が確認された。しかし，ξ=0.001, 0.01では十分な減衰が得られていない。

さて，G/Eの一般的な減衰比ξ=0.001として上記対象について，入力1[N]の単位ステップ応答における制御系設計を試みる。まず，非制御系の応答を図7左に示す[8]。応答の静的変位への整定時間は30秒を越えているのが確認できる。これに対し，式(22)，(23)の制御を施した結果が図7である。パラメータを$\boldsymbol{Q}$=diag($\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4$,0,0,0,0)，$r$=0.01とし，リカッチ方程式の解にはポッター法を採用した。制御を行うことで整定時間は約20秒となり制振性が改善されることが本シミュレーション結果から明らかとなった[9],[10]。制御パラメータについては，設計要求によるものの，構造設計により固有振動数と減衰比の改善を行なった上に，積極的な制御を施すことで制振性の改善がはかられる。

5．むすび

積層複合異方性シェルの構造設計と制御系設計について整理した。今後はシェル構造における異

Table 1 Convergence study of frequencies Ω_1–Ω_5 of three-layered flat panels (G/E material, [30/-30/30]).

n	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
FFFF					
4	5.850	8.071	14.51	21.35	21.67
6	5.600	7.230	13.00	17.78	17.90
8	5.589	7.187	12.78	17.49	17.51
Ref.8)	5.596	7.179	12.82	17.45	17.50
SSSS					
4	11.87	21.93	36.59	41.01	63.18
6	11.81	21.70	35.78	35.98	49.82
8	11.80	21.68	35.70	35.72	49.14
Ref.8)	11.97	21.97	35.88	36.04	49.60
CCCC					
4	23.57	32.70	50.41	58.31	67.24
6	23.27	32.08	49.06	56.12	65.02
8	23.27	32.05	47.76	56.05	64.73
Ref.8)	21.44	32.77	49.55	52.39	65.67
CSSF					
4	12.84	18.14	32.68	40.45	49.74
6	12.75	17.80	28.15	38.95	45.96
8	12.75	17.78	28.01	38.80	45.67
Ref.8)	12.67	17.70	27.77	38.42	43.75

方性や積層によるカップリング振動問題，モード打ち切りやセンサ，アクチュエータのコロケーションによるスピルオーバー問題やさらに最適設計問題について研究を進める必要性を感じる。

参考文献

(1)成沢，直交異方性FRP円筒梁の振動制御，都立高専研究報告書，38，(2003)，53-56.
(2)成沢，異方性平板・シェルの振動と制御，釧路高専研究紀要，(2004)，7-11.
(3)成沢，偏平FRPシェルの振動制御，都立高専研究報告書，39，(2004)，41-46.
(4)成沢・青木・馬場，偏平FRPシェルの振動解析，日本機械学会D&D講演会，(2003)，アブストラクト集255.
(5)成田，境界条件の自由な組み合わせを考慮したFRP積層長方形板の振動解析法，日本複合材料学会誌，18-3，(1992)，113-120.
(6)成沢・青木・馬場，FRPシェルの偏平率が固有振動数に与える影響，日本機械学会関東支部総会講演会，(2004)，

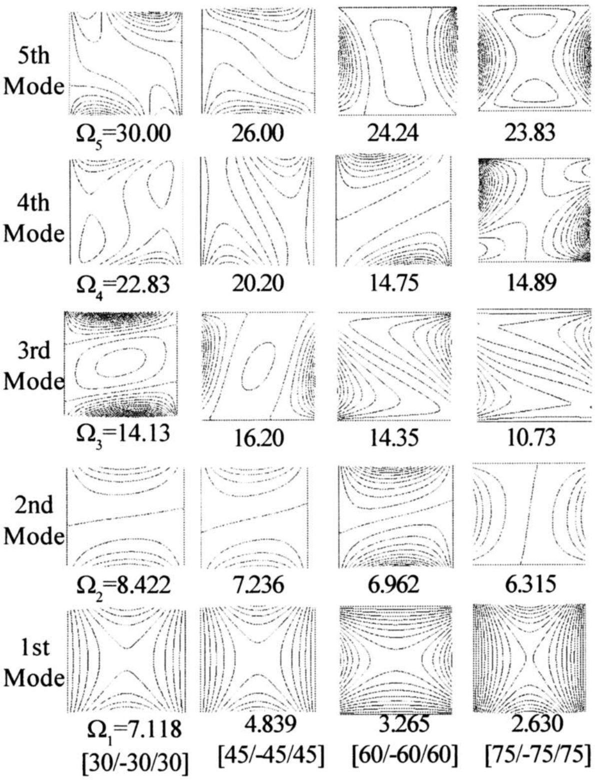


Fig. 2 Mode shapes and coresponding frequncies Ω of three-layered flat panels (G/E material, [θ/−θ/θ],SSFF).

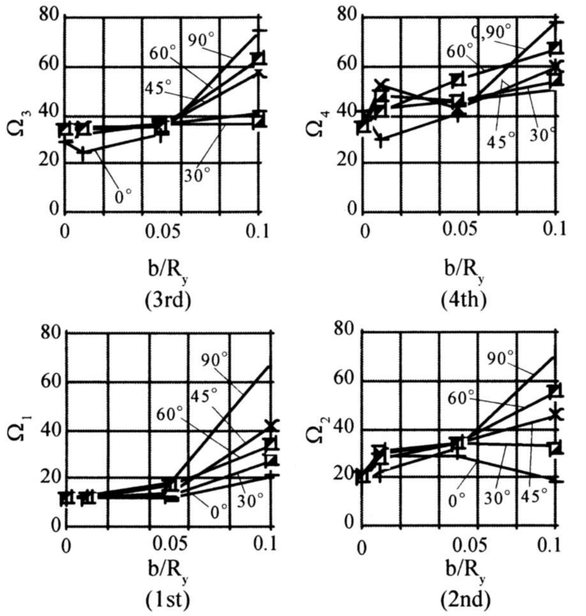
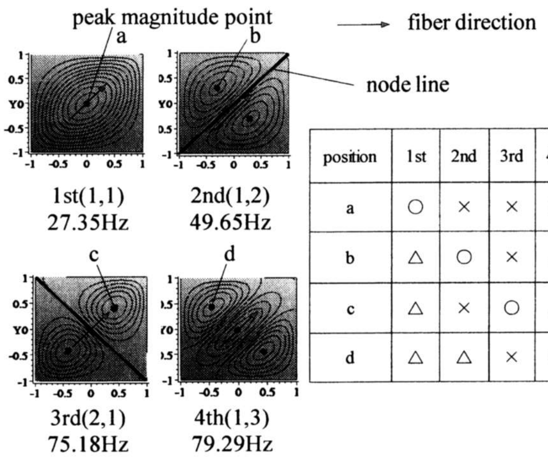


Fig. 3 Mode shapes and coresponding frequncies Ω of three-layered cueved panels([θ/−θ/θ],SSSS).



position	1st	2nd	3rd	4th
a	○	×	×	○
b	△	○	×	△
c	△	×	○	△
d	△	△	×	○

Fig. 4 Mode shapes of single-layer curved panels ([45], b/a=1, h/a=0.005, b/Ry=0.01, SSSS).

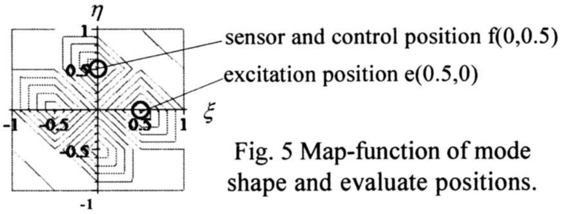


Fig. 5 Map-function of mode shape and evaluate positions.

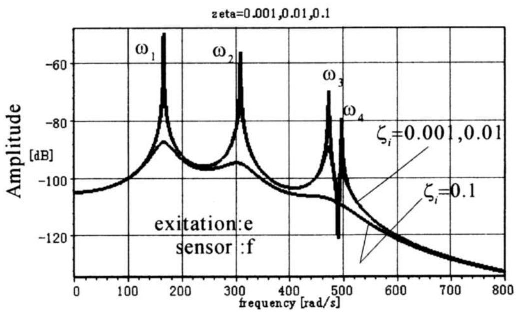


Fig. 6 Uncontroled frequency response.

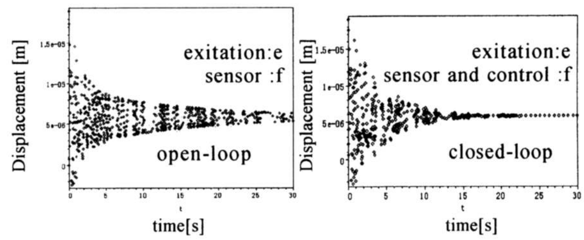


Fig. 7 Step response for system (ζ_i=0.001).

303-304.
(7)成沢・高岡・皆木，偏平FRPシェルの振動応答，日本機械学会D&D講演会，(2004)，アブストラクト集294.
(8)成沢，FRP構造シェルの振動解析とその制御，日本機械学会年次大会講演会，(2004)，11-12.
(9)成沢，積層FRP構造の振動応答，日本機械学会D&D講演会，(2005)，アブストラクト集273.
(10)成沢・山口・野村，曲率を有する積層板の振動応答解析，日本機械学会北海道支部講演会，(2006)，145-146.

付　録

付録１　ドンネルの理論による変位場の簡略化

$$u=u^0-z\frac{\partial w}{\partial x},\ v=v^0-z\frac{1}{R_y}\left(\frac{\partial w}{\partial\theta}-v^0\right)\approx\frac{\partial w}{\partial y},\ w=w^0 \quad \text{(付 1)}$$

付録２　モード質量，モード減衰，モード外力，モード剛性行列の成分

$$m_i=I\int_0^b\int_0^a W_i(x,y)^2dxdy,\quad c_i=2\xi_i,\sqrt{k_i/m_i},\quad k_i=\int_0^b\int_0^a W_i\left\{D_{11}\frac{\partial^4W_i}{\partial x^4}+2(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^4W_i}{\partial x^2\partial y^2}+D_{22}\frac{\partial^4W_i}{\partial y^4}\right.$$

$$\left.+4D_{16}\frac{\partial^4W_i}{\partial x^3\partial y}+4D_{26}\frac{\partial^4W_i}{\partial x\partial y^3}-\left(\frac{B_{12}}{R_y}-B_{11}\right)\frac{\partial^2W_i}{\partial x^2}-\left(\frac{B_{22}}{R_y}-B_{12}\right)\frac{\partial^2W_i}{\partial y^2}-2\left(\frac{B_{26}}{R_y}-B_{16}\right)\frac{\partial^2W_i}{\partial x\partial y}\right)-\frac{A_{12}}{R_y}W_i\right\}dxdy, \quad \text{(付 2)}$$

付録３　多点励振，多点制御系の場合の状態方程式

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{f}(t)+\boldsymbol{E}\boldsymbol{g}(t),$$

$$\begin{Bmatrix}\dot q_1\\ \vdots\\ \dot q_n\\ \ddot q_1\\ \vdots\\ \ddot q_n\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\boldsymbol{I}\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}-\omega_1^2 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & -\omega_n^2\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}-2\xi_1\omega_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & -2\xi_n\omega_n\end{bmatrix}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}q_1\\ \vdots\\ q_n\\ \dot q_1\\ \vdots\\ \dot q_n\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} & \boldsymbol{0} & \\ \hline \frac{F_{11}}{m_1} & \cdots & \frac{F_{1k}}{m_1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{F_{n1}}{m_n} & \cdots & \frac{F_{1k}}{m_n}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}f_1\\ \vdots\\ f_k\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} & \boldsymbol{0} & \\ \hline \frac{G_{11}}{m_1} & \cdots & \frac{G_{1l}}{m_1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{G_{n1}}{m_n} & \cdots & \frac{G_{nl}}{m_n}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}g_1\\ \vdots\\ g_l\end{Bmatrix}$$

(付 3. 1)

ここで，F_{ik}は励振力$f_{\mathrm{k}}(t)$が振動モード$\tilde{W}_i(x,y)$に及ぼす影響係数であり，作用位置を$(fx_{\mathrm{k}},fy_{\mathrm{k}})$とすると以下のように表せる。

$$F_{\mathrm{ik}}=\tilde{W}_i(fx_{\mathrm{k}},fy_{\mathrm{k}}) \quad \text{(付 3. 2)}$$

同様に，制御力$g_l(t)$の作用位置を(gx_l,gy_l)とした場合の，影響係数G_{il}についても以下となる。

$$G_{il}=\tilde{W}_i(gx_l,gy_l) \quad \text{(付 3. 3)}$$

付録４　フィードバックゲインベクトル

$$g_i(t)=-k_pq_i(t)-k_v\dot q_i(t)=-\left\{k_{ip}\quad k_{iv}\right\}\begin{Bmatrix}q_i(t)\\ \dot q_i(t)\end{Bmatrix}=-\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{x}_i(t),$$

$$g(t)=g_1(t)+\cdots+g_n(t)=-\left\{k_{1p},k_{2p},\cdots,k_{np},k_{1v},k_{2v},\cdots,k_{nv}\right\}\begin{Bmatrix}q_1(t)\\ \vdots\\ q_n(t)\\ \dot q_1(t)\\ \vdots\\ \dot q_n(t)\end{Bmatrix} \quad \text{(付 4)}$$

$$=-\left\{\boldsymbol{k}_p\quad \boldsymbol{k}_v\right\}\boldsymbol{x}(t)=-\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}(t)$$

付録５　境界条件インデックス(α1 ～ α4,β1 ～ β4,γ1 ～ γ4 の順)

S-S-S-S(S1)[1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1],　S-S-S-S(S2)[0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1],　F-F-F-F[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
C-C-C-C[1,1,1,1,1,1,1,1,2,2,2,2],　C-S-S-F[1,1,1,0,1,1,1,0,2,1,1,0]