

倒立振子の出力フィードバック制御

池田 裕一* · 相原 等** · 荒井 誠*

Output Feedback Control of Inverted Pendulum

Yuichi IKEDA · Hitoshi AIHARA · Makoto ARAI

Abstract – The system of inverted pendulum has the mechanism that enlarges the amplitude of the pendulum by rotating the pendulum supported to rotate on the horizontal arm right and left. This research aims at the development of the control system that maintains the inverted pendulum that was stand even right above to stable and disturbance attenuation by \mathcal{H}_∞ output feedback control method. For the design of the control system is calculated by using MATLAB. The control program attempts the stabilization of the pendulum by using Simulink. The effectiveness of control law is verified by numerical simulations and experiments.

Key Words : Inverted pendulum, Dynamic output feedback control

1 はじめに

近年、機械システムは大規模化・複雑化してきており、このような機械システムを安定に作動させるには制御系の設計が不可欠である。制御システムの設計の多くは、位置（または姿勢）とその速度情報をフィードバックする状態フィードバック制御¹⁾を前提としている。速度情報は速度センサ（タコジェネレータなど）で直接観測するか位置情報を差分することにより得ることが多いが、これらの場合、得られる速度情報には雑音が含まれており、制御性能を低下させる原因になる。また、コストやシステムの機構などから速度情報を計測するセンサを用いない場合もあり、この場合は速度情報を得ることができない。したがって、位置情報のみを用いた出力フィードバック制御が必要になる。本論文では、過去に本研究室で製作した倒立振子を対象とし、倒立振子を安定化する出力フィードバック制御システムの設計を目的とする。また、実際のシステムには外部環境からの外乱が加わり、制御性能を劣化させる。そこで、外乱抑制性能を付加することを考え、 \mathcal{H}_∞ 制御²⁾に基づいた外乱抑制型出力フィードバック制御器の設計を行う。最後に、シミュレーションおよび実機実験を行いその有効性を検証する。

2 \mathcal{H}_∞ 出力フィードバック制御

制御対象として、つぎの一般化プラント

$$\dot{x} = Ax + B_1w + B_2u \quad (1)$$

$$z = C_1x + D_{11}w + D_{12}u \quad (2)$$

$$y = C_2x + D_{21}w + D_{22}u \quad (3)$$

を考える。ただし、 $x \in \mathbb{R}^n$ は状態、 $w \in \mathbb{R}^r$ は外乱、 $u \in \mathbb{R}^m$ は制御入力、 $z \in \mathbb{R}^q$ は設計者が定める制御量、 $y \in \mathbb{R}^p$ は観測量である。(1)–(3)式に対して、 \mathcal{H}_∞ 制御問題はつぎのように定義される。

\mathcal{H}_∞ 制御問題

一般化プラント (1)–(3) に対して、

1. $w = 0$ のとき、平衡点 $x = 0$ を漸近安定化
2. $w \neq 0$ のとき、 $w \in \mathcal{L}_2$ から制御量 z までの \mathcal{L}_2 ゲインが与えられた正定数 γ 以下、すなわち

$$\sup_{\|w\| \neq 0} \frac{\|z\|_{\mathcal{L}_2}}{\|w\|_{\mathcal{L}_2}} \leq \gamma \quad (4)$$

を満たす制御器を設計せよ。ただし、

$$\|a\|_{\mathcal{L}_2} := \left(\int_0^\infty a^T a dt \right)^{1/2} \quad (5)$$

である。

*釧路工業高等専門学校 機械工学科

**明治乳業株式会社 (平成 18 年度卒業生)

本論文では、つぎの動的出力フィードバック制御器

$$\begin{cases} \dot{x}_k = A_k x_k + B_k y \\ u = C_k x_k + D_k y \end{cases} \quad (6)$$

による出力フィードバック制御を考える。ただし、 $x_k \in \mathbb{R}^{n_k}$ は制御器の状態、 $A_k \in \mathbb{R}^{n_k \times n_k}$ 、 $B_k \in \mathbb{R}^{n_k \times p}$ 、 $C_k \in \mathbb{R}^{m \times n_k}$ 、 $D_k \in \mathbb{R}^{m \times p}$ は制御器のパラメータである。このとき、 \mathcal{H}_∞ 制御問題の解はつぎの定理で与えられる²⁾。

定理 1 (\mathcal{H}_∞ 制御問題の解)

一般化プラント (1)–(3) に対して、以下を仮定する。

- 対 (A, B_2) が可安定、かつ対 (A, C_2) が可検出。
- $D_{22} = 0$ 。

また、動的出力フィードバック制御器 (6) の次数は一般化プラントと等しい、すなわち、 $n_k = n$ とする。このとき、 \mathcal{H}_∞ 制御問題を満たす動的出力フィードバック制御器 (6) はつぎの線形行列不等式 (LMI: Linear Matrix Inequality)

$$\begin{bmatrix} X & E_n \\ * & Y \end{bmatrix} > 0 \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} He(AX + B_2 \hat{C}) & A + B_2 \hat{D} C_2 + \hat{A}^T \\ * & He(YA + \hat{B} C_2) \\ * & * \\ * & * \\ B_1 + B_2 \hat{D} D_{21} & (C_1 X + D_{12} \hat{C})^T \\ Y B_1 + \hat{B} D_{21} & (C_1 + D_{12} \hat{D} C_2)^T \\ -\gamma E_r & (D_{11} + D_{12} \hat{D} D_{21})^T \\ * & -\gamma E_q \end{bmatrix} < 0 \quad (8)$$

の解 $X = X^T > 0$ 、 $Y = Y^T > 0$ 、 \hat{A} 、 \hat{B} 、 \hat{C} 、 \hat{D} により次式のように与えられる。

$$\begin{aligned} D_k &= \hat{D} \\ C_k &= (\hat{C} - D_k C_2 X) M^{-T} \\ B_k &= N^{-1} (\hat{B} - Y B_2 D_k) \\ A_k &= N^{-1} \{ \hat{A} - N B_K C_2 X - Y B_2 C_k M^T \\ &\quad - Y (A + B_2 D_k C_2) X \} M^{-T} \end{aligned} \quad (9)$$

ただし、 E_n は n 次の単位行列、 $He(Z) = Z + Z^T$ 、行列 M 、 N は $NM^T = I_n - YX < 0$ を満たす行列、* は非対角要素の転置要素を表す。

3 倒立振子の運動方程式

本論文では、Fig. 1 に示す回転型倒立振子を制御対象とする。Fig. 1 において、 ϕ [rad] はアームの回転角度、

θ [rad] は振子の回転角度、 τ [Nm] はモータにより生成される制御トルク、 w [Nm] はモータに加わる外乱トルクである。また、 m [kg] を振子の質量、 l [m] を振子の質量中心までの長さ、 L [m] をアーム長さ、 I [kgm²] を振子の質量中心まわりの慣性モーメント、 J [kgm²] をアーム・モータの慣性モーメント、 g [m/s²] を重力加速度とする。この回転型倒立振子の運動方程式はつぎのように与えられる³⁾。

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = G(\tau + w). \quad (10)$$

ただし、

$$q = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \end{bmatrix},$$

$$M(q) = \begin{bmatrix} J + I \sin^2 \theta + mL^2 + ml^2 \sin^2 \theta & \\ & -mlL \cos \theta \\ & -mlL \cos \theta \\ & (I + ml^2) \end{bmatrix},$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 2\dot{\theta}(I + ml^2) \sin \theta \cos \theta & \dot{\theta} mlL \sin \theta \\ -\dot{\phi}(I + ml^2) \sin \theta \cos \theta & 0 \end{bmatrix},$$

$$g(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ -mgl \sin \theta \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

である。

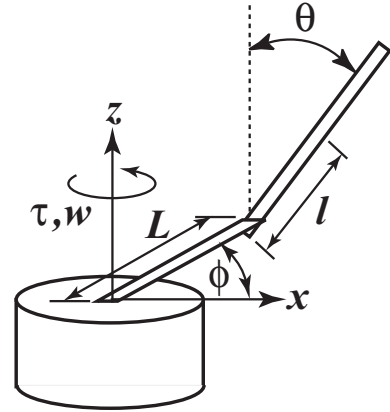


Fig. 1: Rotational inverted pendulum.

4 一般化プラントの導出

本節では、動的出力フィードバック制御器 (6) の設計に用いる一般化プラント (1)–(3) を導出する。本論文の制御目的は、振子を倒立させアーム角度を 0 [rad] に保つこと、すなわち平衡点

$$\theta = 0, \phi = 0, \dot{\theta} = 0, \dot{\phi} = 0 \quad (11)$$

を漸近安定化することであるので、平衡点 (11) の近傍で (10) 式を線形化する。平衡点 (11) の近傍においては $\phi, \theta, \dot{\phi}, \dot{\theta}$ は微小である。このとき、2 次以上の項は無視できるほど小さいこと、および $\sin \theta, \cos \theta$ の $\theta = 0$ におけるテーラー展開から $\sin \theta \approx \theta, \cos \theta \approx 1$ となることより、(10) 式はつぎのように線形化される。

$$M_l \ddot{q} + K_l q = G(\tau + w). \quad (12)$$

ただし、

$$M_l = \begin{bmatrix} J + mL^2 & -mL \\ -mL & I + ml^2 \end{bmatrix},$$

$$K_l = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -mgl \end{bmatrix}$$

である。

つぎに、モータの制御トルクはモータに電圧を加えることにより発生するため、トルク入力 τ を電圧入力 V [V] に変換する。モータに加わる電圧 V とモータのトルク τ には次の関係がある。

$$\tau = K_g K_m i, \quad i = \frac{V}{R} - \frac{K_g K_m}{R} \dot{\phi}. \quad (13)$$

ここで、 i [A] はモータ電流、 R [Ω] はモータコイル直流抵抗、 K_m [A/(rad/s)] はモータトルク定数、 K_g はギア比である。(13) 式より、(12) 式はつぎのようになる。

$$M_l \ddot{q} + D_l \dot{q} + K_l q = G_l V + G w \quad (14)$$

ただし、

$$D_l = \begin{bmatrix} \frac{(K_g K_m)^2}{R} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G_l = \begin{bmatrix} \frac{K_g K_m}{R} \\ 0 \end{bmatrix}$$

である。また、モータ部のギアによるバックラッシュなどの影響による偏差を取り除くため、状態変数としてアーム角度の積分項

$$\zeta = \int_0^t \phi(s) ds \quad (15)$$

を付加する。(14)、(15) 式より (1) 式の係数行列 A, B_1, B_2 は

$$x = \begin{bmatrix} \zeta \\ q \\ \dot{q} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} & \mathbf{0}_{1 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 1} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & E_2 \\ \mathbf{0}_{2 \times 1} & -M_l^{-1} K_l & -M_l^{-1} D_l \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ M_l^{-1} G \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ M_l^{-1} G_l \end{bmatrix}, \quad u = V$$

となる。ただし、 $\mathbf{0}_{n \times m}$ は $n \times m$ 零行列、 $A_{12} = [1 \ 0]$ である。つぎに観測量 (3) であるが、本論文では

$$y = C_2 x \quad (16)$$

とする。本研究室の倒立振子はアーム角度 ϕ と振り角度 θ が観測可能であり、アーム角度の積分 ζ は数値積分により求めることができるので、(16) 式の係数行列 C_2 は

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となる。最後に制御量 (2) であるが、本論文では観測量そのもの、すなわち、 $z = y$ とする。

5 シミュレーションおよび実験結果

ここでは、シミュレーションおよび実機実験により、動的出力フィードバックによる安定化および外乱抑制性能を検証する。なお、物理パラメータは文献⁴⁾と同様に

$$m = 0.174, \quad l = 0.5, \quad L = 0.17, \quad R = 2.6, \quad J = 0.014$$

$$I = 0.0145, \quad K_m = 0.00767, \quad K_g = 70, \quad g = 9.8$$

とした。

5.1 シミュレーション結果

LMI(8)において、 γ を $\gamma = 2$ (Case 1) および $\gamma = 6$ (Case 2) とし、MATLAB の LMI Control Toolbox⁵⁾ を用いて LMI(7)、(8) を解き、動的出力フィードバック制御器 (6) を設計した。行列 M, N は LU 分解により求めた。 $\gamma = 2$ 、および $\gamma = 6$ の場合の A_k, B_k, C_k, D_k を以下に示す。

・Case 1 ($\gamma = 2$):

$$A_k = \begin{bmatrix} -0.96 & 0.46 & -0.04 & -0.33 & -5.42 \\ -2.27 & -3.65 & 0.03 & -281.58 & 4700.75 \\ 1.28 & 2.60 & -0.07 & 192.79 & -3240.80 \\ 0.37 & -0.28 & 1.19 & -20.79 & 332.10 \\ 0.97 & -0.99 & 0.22 & -0.72 & 0.36 \end{bmatrix},$$

$$B_k = \begin{bmatrix} -393.35 & -393.59 & 1.27 \\ -767.19 & -548.67 & 482.72 \\ 405.97 & 274.54 & -12775.41 \\ 124.81 & -347.12 & 3807.60 \\ 5.69 & -844.87 & 440.96 \end{bmatrix},$$

$$C_k^T = \begin{bmatrix} -0.017 \\ 0.026 \\ -0.004 \\ 0.044 \\ 2.149 \end{bmatrix}, \quad D_k^T = \begin{bmatrix} 0.078 \\ 14.848 \\ 2.222 \end{bmatrix}.$$

Case 2 ($\gamma = 6$):

$$A_k = \begin{bmatrix} -0.88 & 0.46 & -0.04 & 0.10 & -0.94 \\ -2.16 & -2.46 & -0.11 & -151.73 & 1311.83 \\ 1.22 & 1.35 & 0.03 & 90.77 & -796.66 \\ 0.45 & -0.28 & 1.18 & -14.27 & 114.95 \\ 0.87 & -1.05 & 0.30 & -1.09 & 0.44 \end{bmatrix},$$

$$B_k = \begin{bmatrix} -274.70 & -274.97 & 4.43 \\ -484.22 & -344.52 & -339.65 \\ 272.91 & 201.60 & -8951.60 \\ 81.27 & -233.83 & -2678.83 \\ 7.94 & -615.89 & -468.86 \end{bmatrix},$$

$$C_k^T = \begin{bmatrix} -0.009 \\ 0.018 \\ -0.002 \\ 0.069 \\ 0.441 \end{bmatrix}, D_k^T = \begin{bmatrix} 0.141 \\ 6.957 \\ 0.426 \end{bmatrix}.$$

初期値を

$$\hat{x}(0) = [0 \ 0 \ 0.052 \ 0 \ 0]^T$$

としたときのシミュレーション結果を Fig. 2, 3 に示す . Fig. 2 が Case 1 , Fig. 3 が Case 2 の制御器を適用したときのアーム角度 ϕ と振り角度 θ の時間応答である . Fig. 2, 3 から , Case 1 および Case 2 の両方ともに倒立振子を安定化できていることがわかる . また , γ が小さい制御器 , すなわち Case 1 のほうが Case 2 よりも平衡点への収束が速く , 振幅も小さい . これは , γ が小さい制御器では大きい制御入力を生成するためであると考えられる .

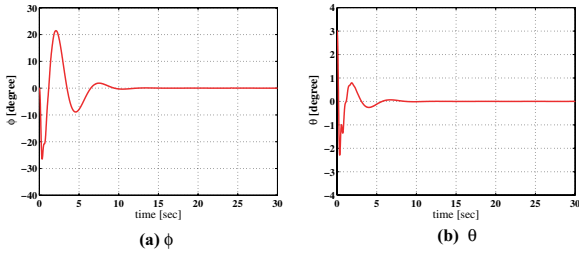


Fig. 2: Simulation results of Case 1.

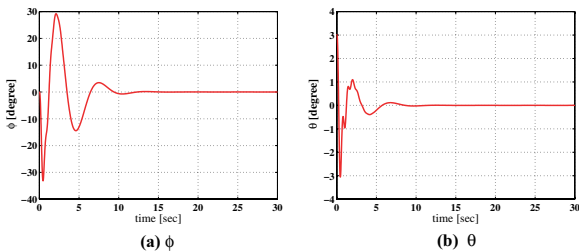


Fig. 3: Simulation results of Case 2.

つぎに , 外乱抑制性能を見るために , 制御開始 30 秒後にインパルス外乱を加えたときの結果を Fig. 4 , 5 に

示す . Fig. 4 が Case 1 , Fig. 5 が Case 2 のインパルス応答である . Fig. 4 , 5 から , γ を小さくしたほうが外乱の影響を抑制していることがわかる . これは , \mathcal{L}_2 ゲインの定義式 (4) から明らかである .

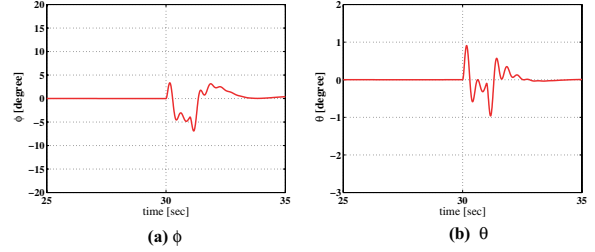


Fig. 4: Impulse response of Case 1.

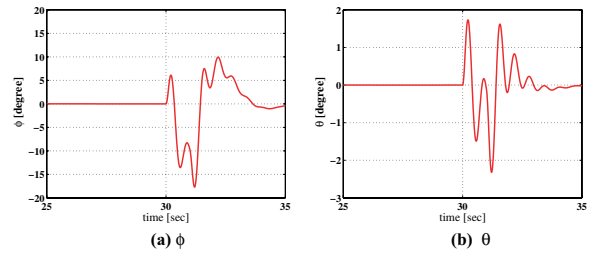


Fig. 5: Impulse response of Case 2.

5.2 実験結果

シミュレーションで設計した制御則を実装し , 同様の条件で実機実験を行った . 安定化制御実験の結果を Fig. 6 , 7 に , インパルス応答実験の結果を Fig. 8 , 9 に示す . Fig. 6 と 8 が Case 1 , Fig. 7 と 9 が Case 2 の制御器を適用したときのアーム角度 ϕ と振り角度 θ の時間応答である . ただし , インパルス応答実験では , 制御開始 50 秒後にインパルス外乱を加えている . また , 実験では ϕ と θ に含まれるノイズを除去するために , つぎのローパス・フィルタ

$$\frac{a_{lp} k_{lp} (s T_{lp1})}{(a_{lp} T_{lp1} s + 1)(T_{lp2} s + 1)}$$

$$a_{lp} = 0.1, k_{lp} = 10, T_{lp1} = T_{lp2} = 1$$

を挿入した . ローパス・フィルタのボード線図を Fig. 10 に示す . Fig. 6 ~ 9 より , シミュレーションと同様の結果となっていることがわかる . θ が振動しているのは , アームと振子の結合部のガタによる振動やノイズによるものと考えられる .

6 おわりに

本論文では , \mathcal{H}_∞ 制御に基づいた外乱抑制型出力フィードバック制御による回転型倒立振子の安定化およ

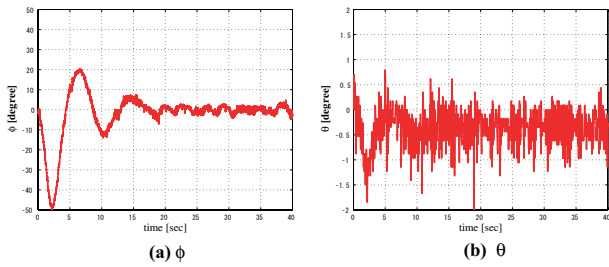


Fig. 6: Experiment results of Case 1.

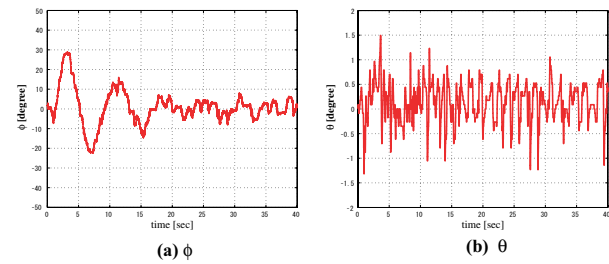


Fig. 7: Experiment results of Case 2.

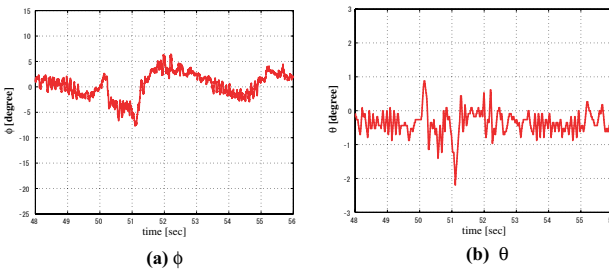


Fig. 8: Impulse response of Case 1 (experiment).

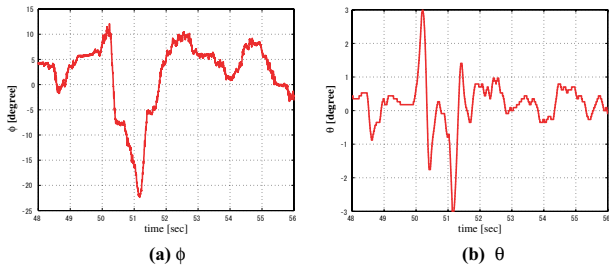


Fig. 9: Impulse response of Case 2 (experiment).

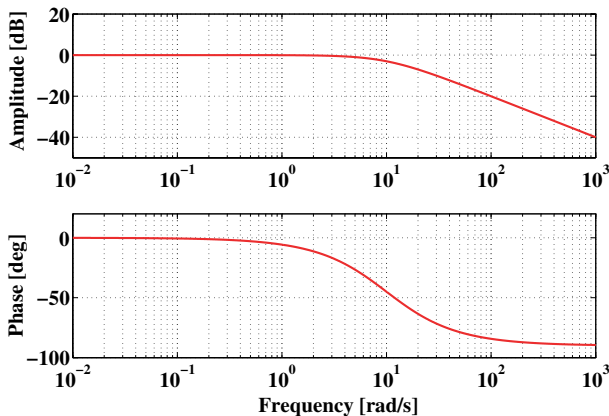


Fig. 10: Bode diagram of low-pass filter.

び外乱抑制制御を考え、シミュレーションおよび実機実験によりその有効性を確認した。

参考文献

- 1) 浜田ほか；現代制御理論入門，コロナ社（1997）
- 2) 藤森 篤；ロバスト制御，コロナ社（2001）
- 3) 杉江，藤本；近似線形化を用いた倒立振子の制御，計測自動制御学会論文集，第31号，10巻，pp.1643–1649（1998）
- 4) 奥田 俊輔；MATLAB を利用した回転振上げ倒立振子の安定化制御，平成 17 年度釧路工業高等専門学校卒業論文（2005）
- 5) P. Gahinet, A.Nemirovski, A.J.Laub and M.Chilali ; LMI Control Tool Box, *The Math Works Inc.* (1996)