

# 周波数整形によるロバストライクな構造—制御系設計— —多自由度質点系への適用—

## Robustic Structure-Control Design based on Frequency-Domain Loop Shaping -An Approach to Multi-Degree-Freedom Systems-

成澤 哲也\*

Tetsuya NARISAWA

Although the control theory has been developed to solve a deterministic model, previously,  $H^\infty$  control theory is applied to design the controller for an uncertainty system. This report presents a tuning methodology of multi-degree freedom systems based on the frequency-domain loop shaping technique so as to appreciate the robustness for its system. As the new control theory using the  $H^\infty$  technique with frequency-domain loop shaping contains the conventional control theory and modern control theory, it is convenient for analyzing the characteristics of mechanical vibration problems subjected to external forces or external noises. This study shows the effectiveness of this method for applying the stability and robustness for multi-degree mechanical systems having uncertainty characteristics.

**Key Word:** Robust Control,  $H^\infty$  Mixed Sensitivity Problem, Loop Shaping, Additional Uncertainty

### 1. はじめに

制御理論は確定系の物理モデルを対象に実証されている。しかしながら実システムへの適用にあたり、系の制振性とともモデルの不確かさに起因する系のロバスト安定性が課題となってきた<sup>1)</sup>。そこで、本報では多自由度質点系の簡単な振動問題に対し $H^\infty$ 制御理論を適用して感度低減化に基づく制振性およびロバスト安定性について具体的に検討した。

### 2. 標準 $H^\infty$ 制御問題

#### 2.1 制振性とロバスト安定性

Fig.1のフィードバックシステムを考える。簡単のため1入出力系とする。Pは制御プラント、 $\Delta_a$ は加

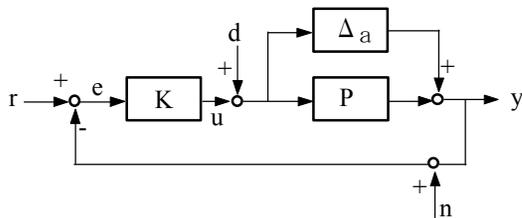


Fig.1 Feedback control system of uncertainty model

法的モデル誤差、Kは補償器、uはアクチュエータ印加力、rは目標値である。ただし、Pと $\Delta_a$ は安定とする<sup>2)</sup>。

まずノミナル安定( $\Delta_a=0$ )について考える。力外乱dおよびセンサノイズnから応答yまでの伝達関数を求め、それぞれの感度を以下で表す。

$$|\delta y/\delta d|=S_a, |\delta y/\delta n|=T$$

$$S_a = P/(1+PK), T = PK/(1+PK) \quad (1)$$

ただし、 $S_a$ とTの全周波数にわたる抑制はきびしい要求のため、制御したい振動モードを主とする周波数重みWを与え $H^\infty$ ノルムで評価する。

$$\|W_1(j\omega)S_a(j\omega)\|_\infty < \gamma, \|W_2(j\omega)T(j\omega)\|_\infty < \gamma \quad (2)$$

このとき応答ゲインは $\gamma/|W_1|, \gamma/|W_2|$ 以下に抑えら

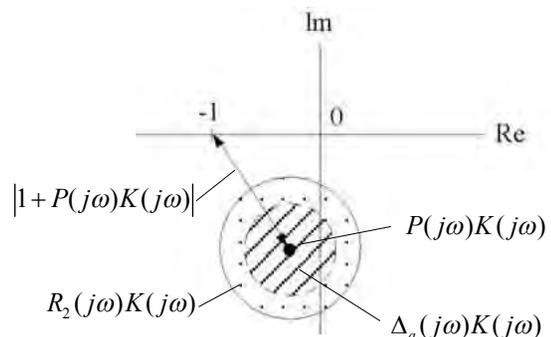


Fig.2 Nyquist diagram

\*釧路高専機械工学科

れる。したがって、低周波域で共振ゲインを、高周波域でノイズゲインを下げるように $W_1$ と $W_2$ を選びノミナル安定を補償する。同様の議論が目標値偏差 $e$ についても成立する。

またモデル誤差 $\Delta_a$ に対するロバスト安定性については、Fig. 1の一巡伝達関数が発散しない条件、

$$\|\Delta_a(j\omega)K(j\omega)\|_\infty < \|1+P(j\omega)K(j\omega)\|_\infty \quad (3)$$

を与える。これはスモールゲイン定理と等価である。つまり、ナイキスト線図Fig. 2のPKに対する相対誤差円盤の半径が $(-1, 0)$ を覆わないことを意味する。

しかし一般に $\Delta_a$ は高次のため、モデルの低次元化の段階で省略した振動モードゲインが大きくなるように $\Delta_a$ を覆いつくす周波数重み $R_2$ を導入し、

$$\|R_2(j\omega)T_a(j\omega)\|_\infty < 1, T_a = K/(1+PK) \quad (4)$$

とする。

また目標値追従性など閉ループ特性については、 $r$ から $y$ までの伝達関数の変化率が、

$$\begin{aligned} \delta\tilde{G}/\delta\tilde{P} &= (G-\tilde{G})/\tilde{G} \\ &= (P-\tilde{P})/\tilde{P}(1+PK) \\ \tilde{G} &= \tilde{P}K/(1+\tilde{P}K), \tilde{P} = P+\Delta_a \end{aligned} \quad (5)$$

となることから、系全体に与える感度が、

$$\tilde{S} = \frac{\delta\tilde{G}}{\tilde{G}} / \frac{\delta\tilde{P}}{\tilde{P}} = 1/(1+(P+\Delta_a)K) \quad (6)$$

と表される。この感度特性は低周波域で生ずるため、周波数重み $R_1$ を導入して、

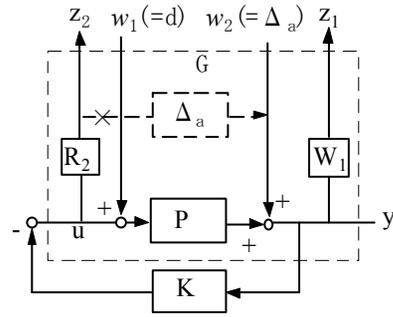
$$\|R_1(j\omega)\tilde{S}(j\omega)\|_\infty < \gamma \quad (7)$$

とする。ただし、 $\tilde{S}$ に誤差 $\Delta_a$ を含むので、あらゆる値についてボード線図を描き最大値を求める作業を行う。直接的には $\mu$ -設計法により感度最小化するが、変化率が十分に小さい場合には $S=1/(1+PK)$ で代用できる。

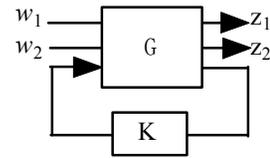
また、プラントPの質量やバネ定数のばらつきなどパラメータ変動へのロバスト性能についても式(2), (4)に包含される。

以上を受け式(2)のノミナル安定のもと、式(4)のロバスト安定性と式(7)のロバスト性能を満たすKの最小値を決定する。しかし、以下のトレードオフ関係を保つ混合感度問題となる。

$$S_a/P+PT_a=1 \quad (8)$$



a. Block diagram



b. H $\infty$  general plant

Fig.3 Equivalent transformation considering with additional uncertainty

## 2. 2 混合感度問題とループ整形法

本報では低周波域で制振性を与えるとともに高周波域のスピルオーバを回避するロバスト安定性について検討する。Fig. 3に一般化プラントの構成を示す。このプラントに対し次のH $\infty$ 標準問題を適用すると、

$$\sup \left[ \|W_1(j\omega)S_a(j\omega)/\gamma\|^2 + \|R_2(j\omega)T_a(j\omega)\|^2 \right] < 1 \quad (9)$$

となる。このH $\infty$ 制御問題の解法としてループ整形法を用いる。そのため、低周波域の重み $W_1$ と高周波域の重み $R_2$ を一つの重み $W$ で表す拡大系プラント、

$$\left\| \frac{W(j\omega)S_a(j\omega)}{T_a(j\omega)/W(j\omega)} \right\|_\infty < \gamma \quad (10)$$

を作る。この不等式は $S_a$ にとって強い条件となっている。次に上式を満たす $K_s$ を求め次式からKを決定する。

$$K=WK_s \quad (11)$$

よって設計すべき変数は $W$ と $\gamma$ となる。

## 3. 多自由度質点系への適用

### 3. 1 モード分離による伝達関数の作成

例としてFig. 4の3自由度系の周波数応答を取り

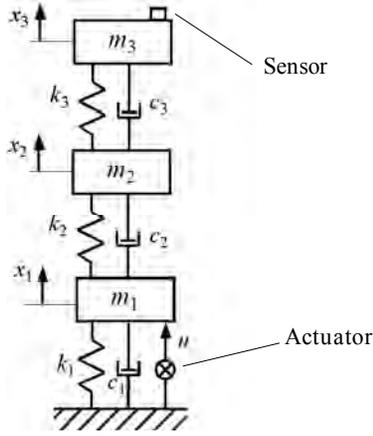


Fig.4 System model

上げる。物理空間における強制振動運動方程式は、

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 + c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_2 (x_1 - x_2) = u \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2 (x_2 - x_1) + c_3 (\dot{x}_2 - \dot{x}_3) \\ \quad + k_3 (x_2 - x_1) = 0 \\ m_3 \ddot{x}_3 + c_3 (\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + k_3 (x_3 - x_2) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

である。しかし、連成振動となるためモード分離を行う<sup>3)</sup>。そのために、非減衰の自由振動運動方程式に対して固有値問題を解き非減衰系の固有振動数 $\omega_i$ および固有振動モード $\phi_i$  ( $i=1, 2, 3$ )を求める。

次にモード方程式を誘導するため、式(12)をマトリックス表示、

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = u \quad (13)$$

を行い、次のモード行列 $\Phi$ で一次変換する。

$$x = \Phi q, \Phi = \{\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3\} \quad (14)$$

ここに、 $q$ は一般化変位ベクトルである。

式(13)に以下の操作を施し、

$$\Phi^T m \Phi \ddot{x} + \Phi^T c \Phi \dot{x} + \Phi^T k \Phi x = \Phi^T u \quad (15)$$

モードの直交性を用いると次の離散化方程式を得る。

$$\begin{aligned} M_i \ddot{q}_i + C_i \dot{q}_i + K_i q_i &= u_i^*, i=1, 2, 3 \\ M_i &= \phi_i^T m \phi_i, C_i = 2\zeta_i \sqrt{K_i/M}, K_i = \phi_i^T k \phi_i, u_i^* = \phi_i^T u \end{aligned} \quad (16)$$

$M_i, K_i, C_i, \phi_i, u_i^*$ はそれぞれ*i*次のモード質量、モード剛性、モード減衰係数、モードベクトル、モード励振力である。なお、ここでモード減衰係数を評価できない場合には、モード減衰比 $\zeta_i$ を仮定する。

また、物理空間の振動応答を算出するためには次の重ね合わせの原理を用いる。

$$x = \sum_{i=1}^3 \phi_i q_i \quad (17)$$

以上のモード分離により物理空間の連成を解除する。このことで、運動方程式を離散化伝達関数の和で表現でき、さらに構造物のもつ不要の高次モードを省略した制御モデルを作ることができる。

以降ではモード空間で周波数応答を考えることとし、状態遷移方程式と出力方程式を次のように表す。

$$\dot{x} = Ax + bu$$

$$y = cx$$

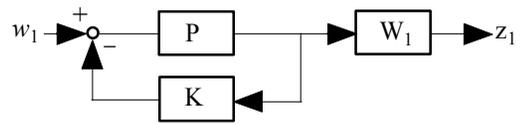
$$\begin{cases} x = \{q \ \dot{q}\}^T, q = \{q_1 \ q_2 \ q_3\}^T \\ A = [a_{ij}], (i, j = 1 \dots 6) \\ a_{14} = a_{25} = a_{36} = 1 \\ a_{41} = -\omega_1^2, a_{52} = -\omega_2^2, a_{63} = -\omega_3^2 \\ a_{44} = -2\zeta_1 \omega_1, a_{55} = -2\zeta_2 \omega_2, a_{66} = -2\zeta_3 \omega_3 \\ \omega_i = \sqrt{K_i/M_i}, \zeta_i = c_i / 2\sqrt{M_i K_i} \\ b = \{0 \ 0 \ 0 \ \phi u / M_1 \ 0 \ 0\} \\ u = \{u \ 0 \ 0\}^T \\ c = \{0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0\} \end{cases} \quad (18)$$

よって、プラントの開ループ伝達関数Pは、

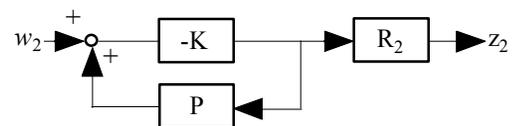
$$P = c(sI - A)^{-1} b \quad (19)$$

となる。

次にH $\infty$ 制御系設計の手順であるが、まずループ整形法により式(19)に対して式(9)あるいは(10)の重み関数を設定する。ここでは式(9)を採用した。次に一般化プラントGを構成し任意の $\gamma$ 以下に収束する



a. Vibration control performance



b. Rubust control performance

Fig.5 Equivalent closed loop diagram

補償器ゲインKを計算する。

さて、評価についてはFig. 3aより $w_1 \rightarrow z_1$ までのブロック線図がFig. 5aであることから、制振性伝達関数Mは次のようになる。

$$M = \left| \frac{P}{1+PK} W_1 \right| = |S_a W_1| \quad (20)$$

同様に変動仮想外乱 $w_1 \rightarrow z_1$ までのブロック線図Fig. 5bより次のロバスト性伝達関数N,

$$N = \left| \frac{-K}{1+PK} R_2 \right| = |-T_a R_2| \quad (21)$$

を得る<sup>4)</sup>。

### 3. 2 設計事例

$M_1=M_2=M_3=0.01\text{Kg}$ ,  $K_1=1$ ,  $K_2=9$ ,  $K_3=25\text{N/m}$ ,  $c_1=c_2=0.001$ ,  $c_3=0.005\text{Ns/m}$ (つまり $\zeta_1=0.005$ ,  $\zeta_2=0.0017$ ,  $\zeta_3=0.005$ )のモード座標モデルを取り上げる。モデルの伝達関数Pのボード線図をFig. 6に示す。固有円振動数は $\omega_1=10$ ,  $\omega_2=30$ ,  $\omega_3=120\text{rad/s}$ であり、1, 2次モードのゲインが40dB以上となっており制振性が要求される。

ここで目標ゲインを0dBとし、低次振動のゲインに大きく重みを配分する設計基準を設け $W_1$ と $R_2$ を次の位相遅れ進み要素で与える<sup>5)</sup>。

$$W_1 = \frac{10s+1000}{100s+1}, R_2 = \frac{100s+100}{s+1000} \quad (22)$$

この重みに対応して求まる制御器Kは、

$$K = \frac{0.2367 s^7 - 236.9 s^6 - 9871 s^5 + 5.533 \times 10^7 s^4}{s^8 + 78.92 s^7 + 4.141 \times 10^4 s^6 + 3.216 \times 10^6 s^5 - 9.708 \times 10^6 s^4 - 1.153 \times 10^7 s^3 - 9.491 \times 10^9 s^2 + 3.154 \times 10^9 s^3 + 1.589 \times 10^{10} s^2 + 2.935 \times 10^{11} s - 1.81 \times 10^9 s - 8.522 \times 10^{11}} + 2.935 \times 10^8 \quad (23)$$

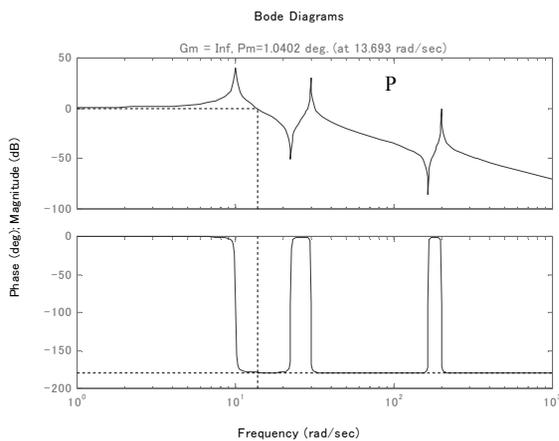


Fig.6 Open loop gain characteristics

となり、モデルの次数と比べて高次になる。Fig. 7がKの周波数応答である。共振ピークをそれぞれ低減するフィードバックゲインをとる。とくに設計仕様に対応し1, 2次振動モードで卓越するフィルタ特性となっている。またパラメータ $\gamma$ は0.322であった。

Fig. 8は式(20)で示される制振性評価Mのゲイン特性である。1, 2次振動モードのゲインKに対し40dBの改善がみられ、全振動モードについて0dBの目標ゲインを達成している。このことから開ループに対して閉ループは低周波域でゲインを大きく抑え、制振性が向上しており設計目標を十分達成していると言える。

Fig. 9は式(21)で示されるロバスト性評価Nのゲイン特性である。併せて加法的誤差 $\Delta_a^{-1}$ のゲインを示した<sup>6)</sup>。ループ整形によって誤差とした3次モードに対してロバスト安定性が補償されていることが

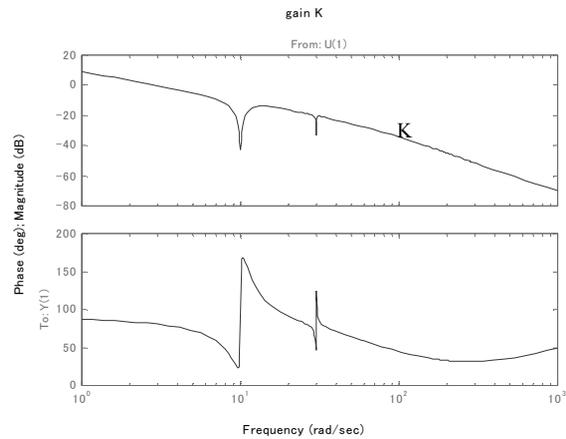


Fig.7  $H \infty$  gain K characteristics

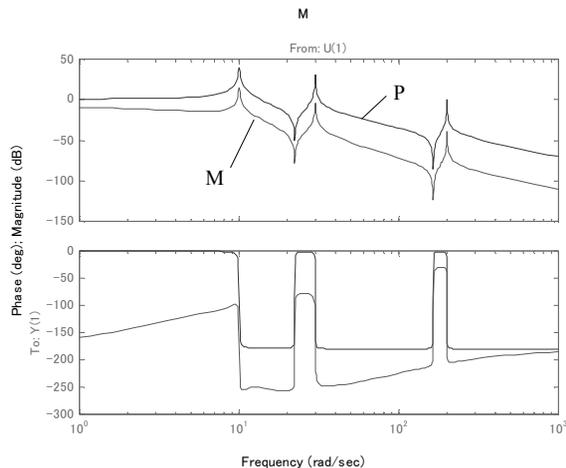


Fig.8 Vibration control performance M

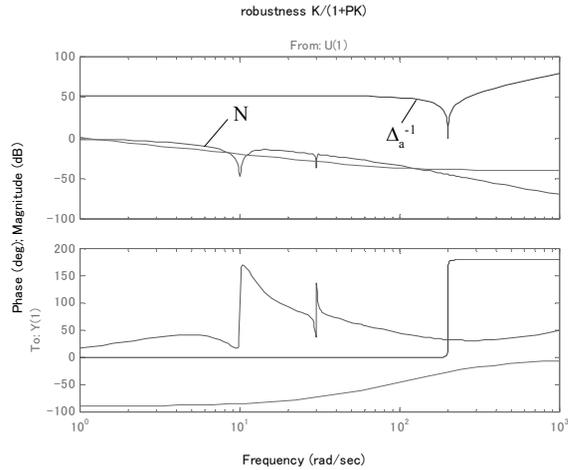


Fig.9 Robust performance N

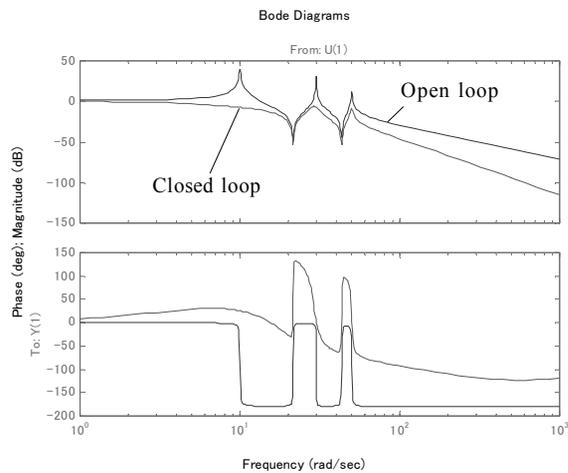


Fig.10 Closed loop gain characteristics

分かる。したがって、スピルオーバー現象も回避可能である。

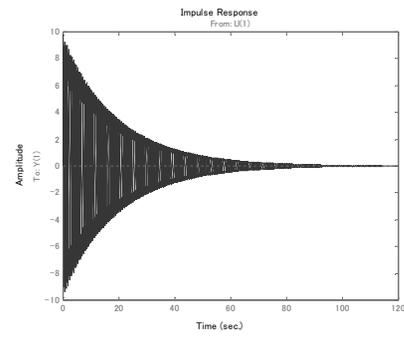
この制御器Kを用いた閉ループ特性がFig. 10である。指定した設計基準にあった周波数整形を確認できる。

続いて時刻歴応答をみるためインパルス応答を確認した。Fig. 11にその応答を示す。開ループFig. 11aに対して閉ループbの整定時間が1/10以下となっている。これは支配的な1, 2次共振ゲインが減少、とくに1次振動振動のゲインが抑制されたことによるものである。

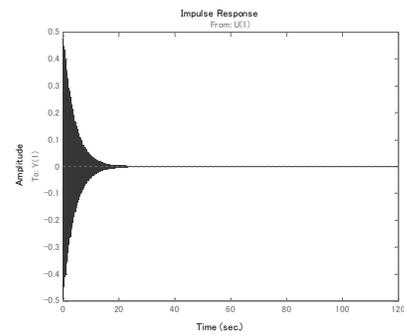
#### 4 おわりに

得られた知見は以下である。

1)  $H_\infty$ 理論を適用した制御系設計により、制振性



a. Open loop response



b. Closed loop response

Fig.11 Impulse distribution

に大きく影響を与える1, 2次振動モードのゲインを低減した。

2) 3次振動モードを加法的誤差とする制御モデルを作成し、その誤差を拡大しないロバスト安定性を実現した。

3) ループ整形によって閉ループゲインの1次振動モードが消え、2, 3次振動モードが残る形となった。このことから重み関数の選定によって固有振動ごとの制振、あるいはロバスト安定性を付与できる。

以上の結論からも、設計者が行う作業は周波数整形による制御フィルタを適切に設定することである。これは最適レギュレータを用いて重みの選定を行う手法に比べて、視覚的で直感的である<sup>7)</sup>。ただし、系のモード分離を行う必要があり、人手で行う難しさがある。また、複雑な振動問題ではリッツ法などの近似解法を用いて精度良いモードベクトルの特定が必須となる<sup>8)</sup>。したがって構造の固有振動数と固有モードを厳密に求めた上で、低次元化モデルの設計を行わなければならない<sup>9)</sup>。

制御を専門としない筆者にとって、複合材料構造

のもつ種々の不確定要素, 例えばコンポジットの弾性定数など確定的に求められないパラメータのばらつきをどのように取り扱うかが課題であった。このような要素をプラント構造的誤差として取り扱う必要があり, 本手法は有効である。

本テーマは都立高専青木繁教授より勉強するようアドバイスを頂いたものであるが時間が経過してしまった。また筆者の勉強不足のため, 本報に大きな間違いがあれば是非指摘願いたい。

参考文献

- (1)細江, H<sub>∞</sub>/μ制御の理論の最先端, 日本機械学会 D&D 講演会, (1993), 1-6.
- (2)J. C. Doyle, B. A. Francis and A. R. Tannenbaum, Feedback Control Theory,(1992), Prentice Hall (藤井監訳, フィードバック制御の理論), (2001), コロナ社.
- (3)背戸, 構造物の振動制御, (2006), コロナ社.
- (4)美多, H<sub>∞</sub>制御, (1994), 昭晃堂.
- (5)西村・平田, 制御系設計, (1998), 東京電機大学出版局.
- (6)川谷, H<sup>∞</sup>制御理論に基づく柔軟構造物のロバスト制振制御, 土木学会論, 468/ I -23, (1993), 1-12.
- (7)成澤, FRP構造セルの振動解析とその制御, 日本機械学会 D&D 講演会, (2004), 11-12.
- (8)成澤, 直交異方性FRP円筒梁の振動制御, 都立高専研究報告書, 38, (2002), 53-56.
- (9)成澤・山口・野村, 曲率を有する積層板の振動応答, 日本機械学会北海道支部講演会, (2006), 145-146.

付録

本問題に対するPID制御系設計を示す。フィードバックゲインKは次のように表される。

$$K = K_p(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s) \text{ (付1)}$$

ここで, K<sub>p</sub>は比例ゲイン, T<sub>i</sub>は積分時間, T<sub>d</sub>は微分時間である。高次系であるためピークゲインM<sub>p</sub>法を用いて設計する。1次振動M<sub>p</sub>の40dB軽減を目標にK<sub>p</sub>=0.01とした場合のナイキスト線図がFig. A1である。また1次振動周期T=0.628sであることから,

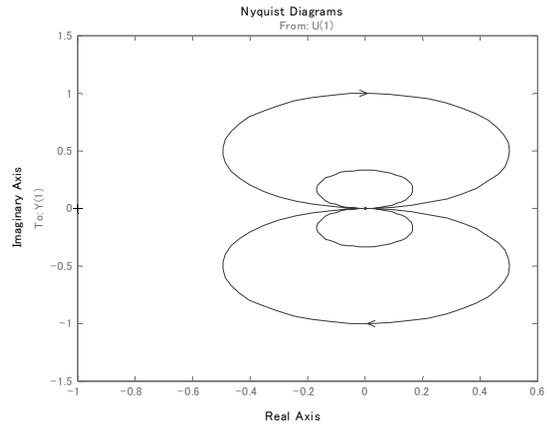


Fig.A1 Nyquist diagram (with PID control)

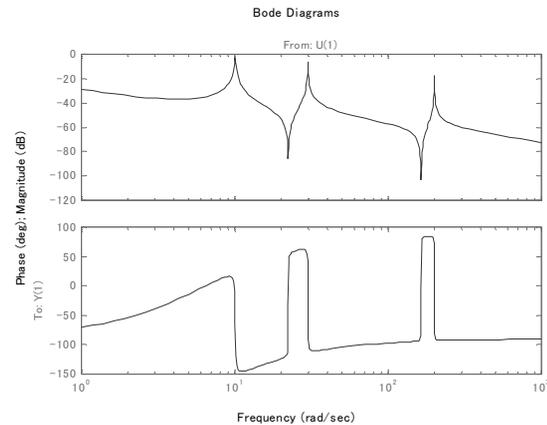


Fig.A2 Bode diagram (with PID control)

限界感度法により, T<sub>i</sub>=0.5 T=0.314 および T<sub>d</sub>=0.125T=0.0785 と計算される。よって,

$$K = 0.01(1 + \frac{1}{0.314s} + 0.0785s) \text{ (付2)}$$

となり, 式(23)と比べて低次であり, 実装が簡単である。ボード線図をFig. A2に示す。目標とする1次振動の0dB化は良好に実現できている。しかし, 3次振動に対するロバスト安定性には反映されず, 低周波数で位相遅れを生じている。