

非可換球面解を持つ質量変形された超対称ヤン-ミルズ理論

加藤 順司* ・ 近藤 陽志** ・ 宮毛 明子***

Mass deformation of twisted super Yang-Mills theory with fuzzy sphere solution

Junji KATO Yoshi KONDO Akiko MIYAKE

Abstract - We investigate mass deformation of twisted superalgebra of $U(N)$ super Yang-Mills (SYM) theories in several models and in several dimensions, motivated by the method formulated in [1]. We show that there are several ways to perform the deformation, if a model possesses four scalar supercharges except for two dimensional B-model. We also evaluate classical vacuum solutions of the potentials of scalar fields for each model. We then find that it is always possible to find fuzzy sphere solution in the theories.

key words : Supersymmetry, Topological Field Theory, Lattice Gauge Theory.

1. はじめに

現在、素粒子の振る舞いを表す理論として局所場の理論である標準模型があります。この理論は大変良く実験事実を表していますが、理論に含まれる色々な素粒子に質量を与えている Higgs 粒子がまだ未発見の状態です。この Higgs 粒子を探す実験 (LHC 実験) が現在行われており、もし見つければ 1995 年のトップクォーク発見以来の新粒子発見となります。また、この実験は標準模型を超えた物理現象の探索を目的としており、新しい物理現象の発見が期待されています。素粒子の標準模型というのはクォークの間に働く強い相互作用の理論である量子色力学 (QCD) と電荷を持つ粒子間に作用する電磁相互作用とベータ崩壊などを引き起こす弱い相互作用が統一された理論であるワインバーグ・サラム理論を合わせたものです。したがって、標準模型には相互作用を特徴付ける三つのゲージ結合定数が含まれています。これらの結合定数のエネルギー依存性を見ると高エネルギー領域で近づいて行くことが知られています。(ゲージ結合定数の統一。) このことは高エネルギー領域で力が統一されている事を示唆しています。しかしながら、標準模型のみではこれらの結合定数は一点で交わることはありません。そこである種の対称性を標準模型に導

* 北海道大学大学院理学研究院

** 北海道大学大学院理学院

*** 釧路高専一般教育科

入すると結合定数はちょうど一点に交わることが明らかにされました。この対称性が超対称性です。

2. 超対称性

標準模型には大きく分けて 2 種類の粒子が含まれています。電子やクォークのような物質を形成する様なフェルミ粒子と力を媒介するゲージ粒子 (光子など) のようなボース粒子があります。超対称性があるということは簡単にいうとフェルミ粒子とボース粒子を入れ替えたときに理論が変わらないということです。したがって、標準模型に含まれる通常の粒子に対してそれと対をなす統計性の違う粒子 (超対称性粒子) が導入され統計性の違う粒子の入れ替えに対して不変になります。もちろん、この超対称性粒子は現在の実験では見つからないので高エネルギー領域では超対称性が成り立っており、低エネルギー領域では何らかの方法で超対称性が破れていると考えられています。ゲージ結合定数の統一の観点から超対称性を導入しましたが、そのほかにも超対称性を導入する利点が幾つかあります。例えば Higgs 粒子の有効質量を計算する時には大きな裸の Higgs 粒子の質量から大きな量子補正数を引くことで 10 桁以上小さい有効質量を出して来ていることになり、少し不自然さが感じられます。(ゲージ階層性の問題。) 超対称性を導入すると超対称性粒子の寄与でこの量子補正が小さいということが知られているのでゲージ階層性の問題は解決され

ると期待されます。また、最近の宇宙の精密な観測などから、宇宙には暗黒物質と呼ばれる光学的には観測にかからない物質がおよそ 22 % も存在していることが明らかになって来ました。暗黒物質の性質は電磁相互作用はほとんどしない質量を持つ安定な粒子となります。標準模型の粒子で暗黒物質の候補を探すとニュートリノが考えられますがニュートリノが暗黒物質だとすると観測事実と矛盾することが知られており、標準模型には暗黒物質になり得る候補がない事も明らかにされました。しかしながら、超対称性を導入した標準模型にはニュートラリーノと呼ばれる電氣的に中性な粒子が何種類か存在しており、有力な暗黒物質の候補と期待されています。以上のような理由により実験的、理論的に超対称性を持つ理論の研究が重要であると思われます。

3. 超対称格子ゲージ理論

本研究の超対称性理論は、主に 4 次元超対称ヤン・ミルズ理論を扱います。この理論は摂動計算では取り扱えない強結合領域を表すことができます。その一つの方法として格子ゲージ理論が挙げられます。格子ゲージ理論は空間を離散的な格子状にしてゲージ対称性を保つように定式化された理論です。この理論は数値計算が可能であり、実際に QCD のハドロン質量計算などへ応用され、実験事実を再現していることが確かめられています。

しかしながら、超対称性を持つ理論の格子上で定式化する場合に問題が生じます。超対称性の生成子は以下の反交換関係を満たさなければなりません。

$$\{Q_\alpha^i, \bar{Q}_\beta^j\} = 2\delta^{ij}\sigma_{\alpha\beta}^\mu P_\mu \quad (1)$$

$Q_\alpha^i, \bar{Q}_\beta^j$ は超対称変換の生成子、 P_μ は運動量の生成子となります。ただし、 $\alpha, \beta = 1, 2, i, \mu = 1, 2, 3, 4$ であり、 P_μ は微分演算子で表す場合には $-i\partial_\mu$ となります。格子上では、この微分演算子がライプニッツ則を満たさないで単純な差分表現では超対称性を持つ理論を格子上で定式化する事が出来ません。そこで全ての超対称性を格子上で定式化するのを諦めます。つまり反交換関係 (1) 式の運動量演算子を含まない部分代数を考えその部分のみを保つようにします。ここでは最大の超対称性を考えているので元々の独立な超対称性の生成子の数は 16 個となります。

$$\begin{aligned} \{s, s_\mu\} &= P_\mu, & \{s_\mu, s_{\rho\sigma}\} &= -\delta_{\rho\sigma, \mu\nu}^\nu P^\nu, \\ \{\bar{s}, \bar{s}_\mu\} &= P_\mu, & \{\bar{s}_\mu, \bar{s}_{\rho\sigma}\} &= -\delta_{\rho\sigma, \mu\nu}^\nu P^\nu. \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 $\delta_{\mu\nu, \rho\sigma}^+ = \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho} - \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ であり、その他の反交換関係は全てゼロになります。この (2) 式をツイストされた超対称代数と呼びます。ツイストされた超対称電荷 $s, \bar{s}, s_\mu, \bar{s}_\mu, s_{\mu\nu}, \bar{s}_{\mu\nu}$ は、 $Q_\alpha^i, \bar{Q}_\beta^j$ の線形結合をとって定義することができます。具体例としては s のみ保つ場合や $s, \bar{s}$ を保つ場合などが考えられます。このとき、 P_μ を含まない最大の部分代数としては、 $s, \bar{s}, s_{\mu\nu}, \bar{s}_{\mu\nu}$ の 8 個の超対称性を保つ場合が考えられます。そこで、以降は $s, \bar{s}$ の 2 個保つ場合を考えます。実際に、2 次元の場合には超対称性が低い場合の超対称格子理論が定式化されています。

4. 質量変形

超対称性が最大の場合には更に問題があります。これから考える以下の作用積分は、ヴァッファ・ウィッテン理論と呼ばれ部分代数が見やすいようにツイストされた形式で書かれています。また、16 個の超対称性変換に対して不変な作用となっています。ただし、ゲージ群は $U(N)$ とします。

$$\begin{aligned} S_0 &= \int d^4x \text{Tr} \\ &\times \left(-\mathcal{D}^\mu v \mathcal{D}_\mu v - \frac{1}{4} \mathcal{D}^\mu v^A \mathcal{D}_\mu v_A + \phi \mathcal{D}^\mu \mathcal{D}_\mu \bar{\phi} \right. \\ &\quad - i\psi^\mu (\mathcal{D}_\mu \lambda - \mathcal{D}^\nu \lambda_{\mu\nu}) + \frac{i}{2} \phi \{\psi^\mu, \psi_\mu\} \\ &\quad - iC^\mu (\mathcal{D}_\mu \chi - \mathcal{D}^\nu \chi_{\mu\nu}^+) - \frac{i}{2} \bar{\phi} \{C^\mu, C_\mu\} \\ &\quad - \frac{i}{2} \bar{\phi} \{\lambda, \lambda\} - \frac{i}{8} \bar{\phi} \{\lambda^{+A}, \lambda_A^+\} - \frac{i}{4} v^{+A} \{\chi_A^+, \lambda\} \\ &\quad + \frac{i}{2} \phi \{\chi, \chi\} + \frac{i}{8} \phi \{\chi^{+A}, \chi_A^+\} + \frac{i}{4} v^{+A} \{\chi, \lambda_A^+\} \\ &\quad - \frac{i}{4} v \{\chi^{+A}, \lambda_A^+\} + \frac{i}{64} \Gamma^{ABC} v_A^+ \{\chi_B^+, \lambda_C^+\} \\ &\quad - i v_{\mu\nu}^+ \{C^\mu, \psi^\nu\} + i v \{C^\mu, \psi_\mu\} - i v \{\chi, \lambda\} \\ &\quad - [\phi, v][\bar{\phi}, v] + \frac{1}{4} [\phi, \bar{\phi}]^2 - \frac{1}{4} [\phi, v^{+A}][\bar{\phi}, v_A^+] \\ &\quad - \frac{1}{32} [v_A^+, v_B^+][v^{+A}, v^{+B}] - \frac{1}{4} [v_A^+, v][v^{+A}, v] \\ &\quad \left. + (F_{\mu\nu}^+)^2 - h_\mu h^\mu - \frac{1}{4} h^{+A} h_A^+ \right) \end{aligned} \quad (3)$$

ここでは、テンソルの添え字をまとめて $A = \mu\nu$ としています。つまり、 $v_A^+ v^{+A} = v_{\mu\nu}^+ v^{+\mu\nu}$ を意味します。また、 $v, \phi, \bar{\phi}, v_A^+, A_\mu, h_\mu, h_A^+$ はボソン場を表し、 $\lambda, \lambda_A^+, \chi, \chi_A^+, \psi_\mu, C_\mu$ はフェルミオン場を表します。特にボソン場の h_μ, h_A^+ は補助場を表します。この補助場を導入することで、運動方程式を使わずに部分超対称代数が閉じます。そのため、オフシェルで理論を構成することができます。ここで、古典解の周りの振る舞いを考えてみると、以下のものが存在することがわ

かります。

$$\phi = a\mathbf{1}, \quad \bar{\phi} = a^*\mathbf{1}, \quad v = b\mathbf{1}, \quad v_A^+ = 0. \quad (4)$$

ここで, a, a^*, b は任意定数で, a, a^* は複素数, b は実数です。また, フェルミオン場は全てゼロです。このポテンシャルの古典解には, ポテンシャルを最低にするような 3 つの自由な任意定数が存在し, 格子ゲージ理論での数値計算を実行する際に同じ寄与を無限に足し合わせてしまうという問題が出て来てしまいます。これを平坦方向の問題といい, 超対称性が最大の場合に現れる悩ましい問題です。この問題は 4 次元だけでなく, 他の低次元にも同様に現れます。しかしながら, 2 次元においてこの平坦な方向の問題を解決する方法が提案されました [1]。この方法は質量変形と呼ばれ 2 つの超対称性を壊すことなく理論に質量項を導入しポテンシャル項を変形します。その結果ポテンシャルに平坦な方向が無くなり, 新たな古典解として非可換球面解が現れます。この 2 次元の質量変形された理論は数値計算する事が可能で正しい連続極限がとれると思われています。我々はこの新たに提案された質量変形の方法が 4 次元や 3 次元の超対称ヤン・ミルズ理論に拡張可能であるのかを調べました。

5. 質量変形された超対称変換

超対称変換の質量変形した部分のみを具体的に書き下すと,

$$\begin{aligned} \Delta s h_\mu &= M C_\mu, & \Delta \bar{s} h_\mu &= M \psi_\mu, \\ \Delta s h_A^+ &= -M \lambda_A^+, & \Delta \bar{s} h_A^+ &= M \chi_A^+, \\ \Delta s \lambda &= -2M\phi, & \Delta \bar{s} \lambda &= 2Mv, \\ \Delta s \chi &= -2Mv, & \Delta \bar{s} \chi &= -2M\bar{\phi}, \end{aligned}$$

となります [2]。ここで, M は質量パラメーターを表します。そこで, 元々あった $s, \bar{s}$ にそれぞれ $\Delta s, \Delta \bar{s}$ を加え, 新たな質量変形された超対称変換を以下で定義します。

$$Q = s + \Delta s, \quad \bar{Q} = \bar{s} + \Delta \bar{s}. \quad (5)$$

質量変形された超対称性の生成子の代数を調べてみると以下の反交換関係を満たします。

$$Q^2 = M J_{++}, \quad \bar{Q}^2 = -M J_{--}, \quad \{Q, \bar{Q}\} = -M J_0.$$

$J_{\pm\pm}, J_0$ は $SU(2)$ の内部対称性の生成子となっています。超対称変換を変更したために, 作用積分も以下の変更を受けます。

$$S_M = (Q\bar{Q} - M)(\mathcal{F}_0 + \Delta\mathcal{F}). \quad (6)$$

$\mathcal{F}_0$ は以下のように表せ, 内部対称性の $SU(2)$ 変換の下で不変です。

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0 &= \lambda\chi + C^\mu\psi_\mu + \frac{1}{4}\chi_A^+\lambda^{+A} - 2v^{+A}F_A^+ \\ &\quad + \frac{i}{96}\Gamma^{+ABC}v_A^+[v_B^+, v_C^+]. \end{aligned} \quad (7)$$

$\Delta\mathcal{F}$ は内部対称性の $SU(2)$ 変換の下で不変な項を付け加える任意性があることを示しています。この項はゼロでも構いませんが, うまく加えてあげると項数を減らすことが出来ます。簡単のため $\Delta\mathcal{F} = 0$ とします。作用積分を以下のように元々の部分と変形された部分とに分けて表すと, 以下のようになります。

$$S_M = S_0 + \Delta S.$$

$$\begin{aligned} \Delta S &= \int d^4x \text{Tr} \\ &\times M \left(2\lambda\chi - 2C^\mu\psi_\mu - \frac{1}{2}\chi^{+A}\lambda_A^+ + 6iv[\phi, \bar{\phi}] \right. \\ &\quad \left. - 4M(v^2 + \phi\bar{\phi}) + 2v^{+A}F_A^+ \right. \\ &\quad \left. - \frac{i}{96}\Gamma_{ABC}^+v^{+A}[v^{+B}, v^{+C}] \right) \end{aligned} \quad (8)$$

6. 非可換球面解

質量変形をおこなうと, 当然, 作用積分の古典解も変わります。今, ポテンシャルの $\phi, \bar{\phi}, v$ に関する部分を抜き出して変形してみます。

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{4}[\phi, \bar{\phi}]^2 - [\phi, v][\bar{\phi}, v] + 6iMv[\phi, \bar{\phi}] \\ &\quad - 4M^2(v^2 + \phi\bar{\phi}) \\ &= \left(\frac{1}{2}[\phi, \bar{\phi}] + 2iMv\right)\left(\frac{1}{2}[\phi, \bar{\phi}] + 2iMv\right)^\dagger \\ &\quad + ([\phi, v] + 2iM\phi)([\phi, v] + 2iM\phi)^\dagger. \end{aligned} \quad (9)$$

すると, ポテンシャルは必ずゼロ以上となるので, 各々の項がゼロの点でポテンシャルは最小となることがわかります。したがって, 以下を満たすものが古典解となります。

$$[\phi, \bar{\phi}] = -4iMv, \quad [\phi, v] = -2iM\phi. \quad (10)$$

$\phi, \bar{\phi}, v$ は具体的に以下のように表せます。

$$\phi = 2iML_+, \quad \bar{\phi} = 2iML_-, \quad v = -2iML_3. \quad (11)$$

ここで, $L_\pm = L_1 \pm L_2, L_3$ は $SU(2)$ の N 次元表現に属します。この解が非可換球面解と呼ばれるものです。またポテンシャルの最後の項を見ると, 単位元に比例する解ではないことがわかります。したがって,

解に余分な任意定数が現れ無いので、(4) 式で現れた平坦な方向の問題が解決されます。これで、平坦な方向の問題がない連続な 4 次元 $N=4$ 超対称ヤン・ミルズ理論が完成した事になります。

7. 他の次元への応用

ここでは、前節の 4 次元で考案された質量変形の方法を用いて 2, 3 次元超対称ヤン・ミルズ理論への拡張を考えます。他の次元への拡張も考えたいのですが、4 次元より高次元の理論では理論に現れるスカラー超対称変換の生成子が 1 つしか現れないために除外します。この質量変形の方法ではゴースト数が逆であるスカラー超対称変換の生成子が各々 1 つずつ必要となるため、低次元での理論の質量変形の拡張が可能となります。原理的には次元簡約の方法で機械的に低次元の理論を作ることが可能であり、実際に非可換球面解を持つ質量変形された 3 次元の超対称ヤン・ミルズ理論を作ることが出来ます。これに更に次元簡約の方法で 2 次元の理論を作ると [1] の論文の理論に一致する事が分ります。

次に、次元簡約の方法を用い 4 次元から 3 次元の理論を作る場合、新しい 2 つのスカラー超対称変換の生成子が現れことが分ります。これらは以下のように現れます。

$$s_\mu \rightarrow s_i, s_4, \quad \bar{s}_\mu \rightarrow \bar{s}_i, \bar{s}_4,$$

ここで、 $\mu = 1, 2, 3, 4$ は 4 次元時空中のベクトルの添え字で、 $i = 1, 2, 3$ は 3 次元時空中のベクトルの添え字になります。次元簡約の結果、4 次元時空の 4 番目の成分が 3 次元時空ではスカラーとして振る舞います。つまり、3 次元では 4 つのスカラーの生成子が存在するために質量変形の方法に幾つかの種類が現れます。ゴースト数が逆でなければならないので、 $(s, \bar{s})$, $(\bar{s}_4, s_4)$, (s, s_4) , $(\bar{s}_4, \bar{s})$ の 4 つの組合せがあることがわかります。これらはすべて質量変形可能であることが示せ、さらに最初の 2 組同士、最後の 2 組同士は等価な質量変形となることが内部対称性の議論から示すことができます。次元簡約から出てこない (s, s_4) の質量変形の方を見てみると、変形された部分の作用積分は

$$\begin{aligned} \Delta S^{D=3} = & \int d^3x \text{Tr} \\ & \times \left(-6MA_4[\phi, \bar{\phi}] + 4M^2(A_4^2 - \phi\bar{\phi}) \right. \\ & \left. - 2M(\psi_4\lambda - C_4\chi + \lambda^i\psi_i + C^i\chi_i \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + i\epsilon^{ijk}v_i\mathcal{D}_jv_k - 2iv^i\mathcal{D}_iv \\ & \left. + i\epsilon^{ijk}(A_i\partial_jA_k - \frac{i}{3}A_i[A_j, A_k]) \right) \end{aligned}$$

となります。このとき、非可換球面解に関わる部分はほぼ変更が無いことが分ります。違いは、 v の役割を A_4 が果たしているところです。特筆すべきは、3 次元時空に特徴的なチャーン・サイモン項が現れるところです。

これまで考えていたのは超対称性が最大の 16 個の場合を考えて来ましたが、更に超対称性の数が半分の 8 個の場合についても拡張することが出来ることを明らかにしました [2]。扱う模型の詳細は省略しますが、このとき 4 次元の場合にはスカラーの超対称変換の生成子が 1 つしかないので適用することが出来ないことが分ります。3 次元の場合には、スカラーの生成子が 2 つ現れる模型が 2 つ知られていまして、各々、A 模型、B 模型と呼ばれています。これらのどちらの模型もこの質量変形が可能であることがわかりました。また、これらの模型を次元簡約することにより 2 次元の質量変形された模型が得られます。これにより、2 次元 A 模型は論文 [1] の著者等の結果と一致することがわかりました。

8. まとめと展望

最後に我々が質量変形した模型をまとめます。超対称性が最大の場合には、4 次元ヴァッファ・ウィッテン理論とそれを次元簡約した 3 次元 $N=8$ ツイストされた超対称ヤン・ミルズ理論で質量変形された模型を構成しました。また超対称性が半分の場合には、4 次元Donaldson・ウィッテン理論を次元簡約した 2, 3 次元 A 模型を構成し、更に 3 次元ヤン・ミルズ理論の B 模型とそれを次元簡約した 2 次元について質量変形された模型を構成しました。いずれの場合も 2 つの超対称性を保ち質量変形が行われています。

また、これらの模型は数値計算をする場合に起こる平坦な方向の問題が生じないため、格子ゲージ理論への応用が期待されています。

参考文献

- [1] M. Hanada, S. Matsuura, F. Sugino,
Prog. Theor. Phys. 126 (2011), 597-611
- [2] J. Kato, Y. Kondo, A. Miyake,
JHEP 1109:019, 2011