ゲージ理論を用いた位相不変量の非可換変形

佐古彰史[1]

Noncommutative deformation of topological invariants in gauge theories

Akifumi Sako

Abstract - Solitons in gauge theories in noncommutative spaces had been constructed by using several methods. However we did not have noncommutative soliton solutions by using deformation quantization from solitons in commutative soliton solutions, and we did not have researches for such solutions. In this article, we report them for the case of instantons that are solitons in a 4-dimensional gauge theory. Deformation quantization of instanton solutions for $U(N)$ $(N > 1)$ gauge theory in $\mathbb{R}^4$ is constructed and it is shown that their instanton numbers are preserved under the deformation quantization. We also derive the one-to-one correspondence between the instantons and ADHM data. This article is written as a report for summarizing works supported by the KAKENHI No.20740049 (Grant-in-Aid for Young Scientists (B)).

Key Words: Noncommutative geometry, Gauge Theory, Instanton

この論文は研究課題名が「ゲージ理論を用いた位相不変量の非可換変形」で採択された3年間の科研費補助金若手研究(B)による補助期間が終了するに際し，この間に進められた研究内容について報告するものである。3年間で合計351万円（直接経費270万円，間接経費81万円）の研究補助金により，有意義な研究を進める事ができた。

1．研究開始当初の背景

超弦理論の主張するところによると時空は非可換である。この発見は量子力学の発見時とは異なるレベルの非可換空間の再発見である。こうした発見を契機に非可換空間上のゲージ理論などの場の理論が研究され，その結果，超対称性をもつゲージ理論の低エネルギー理論を非摂動的に完全に解いたNekrasov-Okounkov定理が証明されるなど，従来と異なるアプローチや応用が次々と生み出されている。Donaldson理論やSeiberg-Witten理論のようなものから特性類や指数定理など様々な場面で見られるように，微分位相幾何学に対してゲージ理論の果たしてきた役割は大きい。これらの経験から非可換多様体上のゲージ理論が非可換幾何学に対して大きな貢献を果たすことが期待されていた。しかしかつては注目度が低く，技術的にも未熟だったことが原因で十分な研究が行われていなかった。しかし近年は上述の通り非可換多様体上のゲージ理論が盛んに研究され，少なくとも非可換ユークリッド空間上のゲージ理論の重要なソリトン解の研究については，ある程度の道具がそろった感がある。ようやくゲージ理論を用いた非可換幾何学の時代が幕を開けようとしていた。

2．研究の目的

非可換変形された多様体（非可換多様体）の微分位相幾何学的性質の解明を，その上で定義されたゲージ理論を用いて行うことが目的である。具体的には，初めにゲージ理論のソリトン解が特徴づける特性類の非可換変形を幾つかのモデルで検証し，位相不変量の非可換変形の性質を解明すること。次に，そのソリトン解のモジュライ空間の特性類である位相的場の理論についても，具体例を作成しながら一般的な位相的場の理論の非可換変形を定式化することが目的である。

---
[1]釧路高専一般教育科

３．研究の方法

非可換空間上のゲージ理論を通して定義される位相不変量を解明することが目標だが，古典論のレベルでの位相不変量と量子論のレベルで定義される位相不変量の２種類がある。段階的に，まず古典論から解明する必要がある。ゲージ理論に現れるソリトン方程式としての偏微分方程式（インスタントン方程式やモノポール程式）の厳密解やその解で与えられる特性類などの位相不変量が，どのように非可換変形されるか調査することが最初の課題である。第一段階は，慶應義塾大学前田吉昭教授との共同研究を行い，東北大学綿村哲准教授，名古屋大学浜中真志助教らの研究協力を得ることで効率化が図られた。また，フィンランド大での A. Tureanu, M. Chaichian および C. Montonen らとの議論は有意義にはたらいた。この成果を踏まえて第２段階である量子論レベルで定義される位相不変量の解明を目指したのであるが，それに関しては十分研究する時間がなかったのが実態である。

４．研究成果

非可換空間上のゲージ理論を用いた位相不変量に注目が集まったのは非可換空間上のソリトン解，特にインスタントン解が構成されたことがきっかけであった。非可換空間上のインスタントンの研究は，Nekrasov と Schwarz が ADHM 構成法（Atiyah 等による ADHM データと呼ばれるある代数方程式（ADHM 方程式）の解からインスタントンを構成する方法）を非可換 $\mathbb{R}^4$ へ拡張することで始まった [1]。その ADHM 構成法を用いたインスタントンの厳密解（ADHM インスタントン）がいくつか作られ ([2] 等)，それらを用いて ADHM インスタントンの定性的な解析が進んだ。例えば，局所的な曲率の積分であるインスタントン数 (Pontryagin 数) と ADHM 構成法で現れるベクトル空間の次元が一致することを示し，非可換変形を特徴付ける非可換パラメータに依存せず整数値を取ることを明らかにした [3, 4]。この対応は可換な $\mathbb{R}^4$ 上では周知の事実である。こうした解析から ADHM インスタントンに関しては理解がすすんだ。しかし可換な場合と異なり ADHM データとインスタントンの間の１対１対応が証明されていない事，変形量子化の方法ではない構成法のため可換な空間でのインスタントンとの対応関係に不明な点が有る事など，課題が残っていた。　そこで今回の研究で，我々は変形量子化の立場で，可換な空間におけるインスタントン解から滑らかに変形量子化することで非可換変形した解を構成する方法を構築し，そのインスタントン解の漸近挙動（ゲージ場の変形部分については $1/r^3$ のオーダーで減衰) について明らかにした。その結果として非可換 $\mathbb{R}^4$ 上で曲率の積分で定義されるインスタントン数が変形量子化のもとで変形されないことも示すことができた [5]。この方法で非可換変形を受けたインスタントンを伴う Dirac 作用素に対するゼロモードも構成しその漸近挙動についても明らかにした。それらを用いてその Dirac 作用素に対する指数定理とグリーン関数も構成され，さらに N が２以上の U(N) ゲージ理論における変形量子化されたインスタントンから ADHM 方程式を導出することに成功した。また，ADHM データと非可換インスタントンとの１対１対応も証明することができた [6]。また，U(1) のインスタントンに関しては以下の事実があきらかになった。1. 通常の非可換変形では非可換インスタントンが現れない事。2. しかし作用汎関数は有限に保つものの遠方での減衰が遅いゲージ場から出発すると非可換インスタントンが存在しうること。3. 一般に作用汎関数は非可換変形で発散を伴うが，インスタントン方程式を用いてゲージ場を変形することで，作用汎関数を有限にできる事。ただし３に関しては非可換パラメータの２次までの結果から得られた推論である。　以上のように，古典レベルで定義される位相不変量の非可換変形に関して $\mathbb{R}^4$ に関する限りは包括的な議論が行われインスタントンの変形量子化による非可換変形の様子が（U(1) インスタントンのように可換極限が存在しないものを除いては）解明され

たといってもいいだろう。特にADHMとの対応が解明されるというのは，当初の目標以上の成果と言える。その一方で量子位相不変量で定式化に関しては手つかずであったことと，その布石となるユークリッド空間以外での変形量子化によるゲージ理論の考察についても殆ど行う事が出来なかった。これらについては今後の課題としたい。　なお，今回の研究成果が以下に列挙してあるように7回もの国際会議の場で発表する機会に恵まれたのも科研費補助金に採択された結果である。もし補助金がなければ海外の研究者との議論で得られた研究成果が挙げられなかったのみならず，研究発表の場もほとんど失われたに違いないということを強調しておく。

5．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計　3件）

．佐古彰史：「Recent Developments in Instantons in Noncommutative $\mathbb{R}^4$」Advances in Mathematical Physics 査読有り Vol. 2010 (2010) 270694, 28 pages Invited article for the special issue “Nonlinear and Noncommutative Mathematics: New Developments and Applications in Quantum Physics”

．佐古彰史: 「Noncommutative Deformation of Instantons and Vortexes」Journal of Geometry and Symmetry in Physics 査読有り 14 (2009) p85-96

．前田吉昭，佐古彰史：「Noncommutative Deformation of Instantons」Journal of Geometry and Physics 査読有り vol.58 (2008) p1784-1791

〔学会発表〕（計　10件）

．佐古彰史：国際会議招待講演「Deformation Quantization of U(N) Gauge Theory in $\mathbb{R}^4$」RIMS International Conference on Noncommutative Geometry and Physics (2010年11月)(RIMS, Kyoto University)

．佐古彰史：国際会議招待講演「Deformation Quantization of Instantons in $\mathbb{R}^4$」Supersymmetry in Integrable Systems - SIS’10 (2010年8月）Guest House of the Yerevan State Univ.

．佐古彰史, 前田吉昭：国内会議一般講演「ADHM 構成法の非可換変形」日本数学会2010年度年会（2010年3月)

．佐古彰史：国際会議招待講演「Smooth Noncommutative Deformation of Instantons and the ADHM construction」Helsinki Univ. HIP joint colloquia seminars (2009年8月）Helsinki Univ.

．佐古彰史：国際会議ポスター発表「Noncommutative Deformation of Instantons, Instanton Numbers and ADHM Construction」ICMP(International Congress on Mathematical Physics)09 (2009年8月）プラハ Clarion　Congress Hotel Prague

．佐古彰史, 前田吉昭：国内会議一般講演「ユークリッド空間上のインスタントンの非可換変形」日本物理学会第64回年次大会（2009年3月）

．佐古彰史, 前田吉昭：国内会議一般講演「$\mathbb{R}^4$ 上のインスタントンの非可換変形と位相不変量の保存」日本数学会2009年度年会（2009年3月）

．佐古彰史：国際会議招待講演「Are Topological Charges Preserved under Noncommutative Deformation in Gauge Theories?」International Workshop on Noncommutative Geometry and Physics 2009 (2009年2月）Keio University

．佐古彰史：国際会議ポスター発表「Noncommutative Deformation of Topological invariants in Gauge theories」Sapporo Winter School 09 (2009年1月）Hokkaido University

．佐古彰史：国際会議一般講演「Noncommutative Deformation of Vortexes and Instantons」International Conference on Geometry, Integrability and Quantization (Hotel Panorama, Varna, Bulgaria)(2008年6月)

6．プロジェクトの成果の数学的詳細

以下では，今回のプロジェクトで得られた成果の概要を，やや専門的に部分まで踏み込んで解説することにする。

我々があつかっている4次元多様体上のゲージ理論に現れるソリトンとしてインスタントンなどがある。インスタントンとはゲージ理論における自己双対あるいは反自己双対方程式（$F^+ = 0$) の解であり，方程式はインスタントン方程式とも呼ばれる。こうしたソリトン解はトポロジーなどの非局所的，非摂動的性質を担っており，その解析によって様々な幾何学的な情報が得られることが，可換空間の多様体に関しては知られていることである。我々はこの技術を，非可換変形して非可換多様体の上でも使えるように拡張することを試みた。非可換変形とは空間の非可換化 (座標の交換関係 $[x^\mu, x^\nu] = x^\mu x^\nu - x^\nu x^\mu = i\hbar\theta^{\mu\nu}$, θ は実反対称定数行列で $\hbar$ は実定数) を変形量子化の方法で行うことを意味し，具体的にはすべての積をスター積

$$
\begin{aligned}
&f(x) \star g(x) \\
&:= f(x) \exp\left(\frac{i}{2}\overleftarrow{\partial}_\mu \theta^{\mu\nu} \overrightarrow{\partial}_\nu\right) g(x)
\end{aligned}
$$

に置き換えることを行う。空間の非可換変形の影響でインスタントン方程式やその解も変形を受ける。この変形について報告する。以下では非可換変形を受けたインスタントンを単に非可換インスタントンと呼ぶ。ゲージ理論を定義するベースの多様体として $\mathbb{R}^4$ を考え，ゲージ群はユニタリー群とする。

従来までの非可換インスタントンの理解はADHM 構成法による解の構成とそれに基づくインスタントン数（第1 Pontrjagin 数）の解析により進められた。その結果多くの非可換インスタントン解が構成され，ADHM 構成法によるインスタントン解ではインスタントン数が整数値をとることなどが示されていた。しかし，ADHM 構成法を用いて作られる解は一般に可換極限 ($\hbar \to 0$) をとることが難しく，可換なインスタントンとの対応がわからない。今回は $\hbar$ での形式展開を用いることで非可換インスタントン解を構成し，インスタントン数が非可換変形に依存しないことを示した。以下にその概要を示す。[5]

形式的にゲージ場を $A_\mu = \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} A_\mu^{(l)}\hbar^l$ と展開し $\hbar$ の l 次のオーダーの非可換インスタントン方程式を書くと，自己双対射影作用素 $P = (1+*)/2$ を用いて

$$
\begin{aligned}
&P^{\mu\nu,\rho\tau}(\partial_\rho A_\tau^{(l)} - \partial_\tau A_\rho^{(l)} + i[A_\rho^{(l)}, A_\tau^{(l)}] + C_{\rho\tau}^{(l)}) \\
&\quad = 0, \qquad (1)
\end{aligned}
$$

が得られる。ただし $\overleftrightarrow{\Delta} := \dfrac{i}{2}\overleftarrow{\partial}_\mu \theta_0^{\mu\nu} \overrightarrow{\partial}_\nu$ とし，添え字集合

$$
\begin{aligned}
I(l) \equiv \quad &\{(p;\ m, n) \in \mathbb{Z}^3 | p + m + n = l, \\
&p, m, n \geq 0,\ m \neq l, n \neq l\}.
\end{aligned}
$$

を用いて，$C_{\rho\tau}^{(l)}$ は

$$
\begin{aligned}
\sum_{(p;\ m,n)\in I(l)} \hbar^{p+m+n} \frac{1}{p\,!}\Big(\ & A_\rho^{(m)} (\overleftrightarrow{\Delta})^p A_\tau^{(n)} \\
& - A_\tau^{(m)} (\overleftrightarrow{\Delta})^p A_\rho^{(n)}\Big)\ ,
\end{aligned}
$$

と定義されているものとする。

$A^{(l)} (l \geq 1)$ についてのゲージ固定条件を $A - A^{(0)} = D_{A^{(0)}}^* B$, $B \in \Omega_+^2$,(ただし $(D_{A^{(0)}}^*)_\rho^{\mu\nu} B_{\mu\nu} = \delta_\rho^\nu D^{(0)\mu} B_{\mu\nu} - \delta_\rho^\mu D^{(0)\nu} B_{\mu\nu}$.) とすると，$l$ 次のインスタントン方程式は

$$
2D_{(0)}^2 B^{(l)\mu\nu} + P^{\mu\nu,\rho\tau} C_{\rho\tau}^{(l)} = 0,
$$

に帰着される。$D_{(0)}^2$ のグリーン関数は具体的に構成されしたがって非可換インスタントン解が構成される。またグリーン関数の漸近的な性質も調べられ，それを用いると，$|A^{(l)}| < O(|x|^{-3+\epsilon})$, ($\forall \epsilon > 0$) であることも示される。インスタントン数は

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{8\pi^2}\int trF \wedge \star F \\
&= \frac{1}{8\pi^2}\int tr\ d(A \wedge \star dA + \frac{2}{3} A \wedge \star A \wedge \star A) \\
&+ \frac{1}{8\pi^2}\int trP_\star
\end{aligned}
$$

ただし

$$P_\star = \frac{1}{3}\{F\wedge\star A\wedge\star A+2A\wedge\star F\wedge\star A + A\wedge\star A\wedge\star F + A\wedge\star A\wedge\star A\wedge\star A\}$$

である。非可換変形によって $F\wedge F$ も変形をうけるのであるが，その積分が不変であることが $|A^{(l)}|<O(|x|^{-3+\epsilon})$ を用いて示すことができる。

$$\frac{1}{8\pi^2}\int trF\wedge\star F = \frac{1}{8\pi^2}\int trF^{(0)}\wedge F^{(0)},$$

ここで，$F^{(0)}$ は $A^{(0)}$ から作られる曲率 2 形式で可換インスタントンを表す。まとめると以下のようになる。

Theorem 1. $A^{(0)}_\mu$ が $\mathbb{R}^4$ のインスタントンであるとする。その際，形式的な非可換インスタントン解 $A_\mu=\sum_{l=0}^\infty A^{(l)}_\mu\hbar^l$ が存在し，インスタントン数 $\frac{1}{8\pi^2}\int trF\wedge\star F$ は非可換パラメータ $\hbar$ に依存しない 。

このようなゲージ理論におけるソリトンの非可換変形とそのトポロジカルチャージの非可換変形のもとでの不変性の別な例として，2 次元のボーテックスがある [7]。

次に，非可換変形のもとでの ADHM 構成法の変形について考える。

ADHM 構成法とはインスタントン（インスタントン方程式の解）を構成する方法である。例えば $U(N)$ ゲージ理論でのインスタントンを構成する場合，$T^\mu\in End(\mathbb{C}^k), S\in Hom(\mathbf{S}^+\otimes\mathbb{C}^k,\mathbb{C}^N)$(ただし $\mathbf{S}=\mathbf{S}^+\oplus\mathbf{S}^-$ はスピン束とする) である定数 $k\times k$ エルミート行列 T^μ と複素定数 $2N\times k$ 行列 S で,

$$[T^\mu,T^\nu]^+=\frac{1}{2}tr(S^\dagger S\bar\sigma^{\mu\nu})-i\theta^{\mu\nu+}I_{k\times k}. \quad (2)$$

を満たすもの（ADHM データ）を見つける。ただし (2) の中の $^+$ は μ,ν について自己双対部分への射影を表し，tr はスピノルの添え字についてのトレースを表す。$(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4):=(-i\tau_1,-i\tau_2,-i\tau_3,I_{2\times2})$ (τ_i は Pauli 行列）とし，

$$\nabla:=\begin{pmatrix} S\\ \sigma_\mu(x^\mu-T^\mu)\end{pmatrix},$$
$$\Box:=\frac{1}{2}tr(D^\dagger D)+2T_\mu x^\mu+|x|^2,$$

$$D=\begin{pmatrix}-S\\ T\end{pmatrix} \quad (3)$$

を導入する。ただし $T=T^\mu\sigma_\mu$ である。$(N+2k)\times N$ 行列 V で以下を満たすものを探す。

$$\nabla^\dagger\star V = O,\quad V^\dagger\star V=I_{N\times N},$$
$$V\star V^\dagger = I_{(N+2k)\times(N+2k)}-\nabla\star\Box_\star^{-1}\star\nabla^\dagger$$

ただし $f_\star^{-1}$ はスター積の意味での逆 $f\star f_\star^{-1}=1$ を表す。こうして得られた V を用いると

$$A_\mu=V^\dagger\star\partial_\mu V \quad (4)$$

でインスタントンが得られることが Nekrasov と Schwarz によって示された。これが非可換の場合の ADHM 構成法である [1]。また，この時インスタントン数（第 2 チャーン数）が k であることもある種の非可換パラメータ θ が自己双対なときには証明されている [4]。以下ではこうして得られるインスタントンを非可換 ADHM インスタントンと呼ぶ。

特筆すべきは ADHM 構成法により $U(1)$ のインスタントンのような可換極限で特異な解が非可換空間上では非特異な解として得られることである。また [4] では，インスタントン数が k であることを導く過程で非可換であることが重要な役割を果たしているため，可換なインスタントンと非可換インスタントンの関係がかえって謎に包まれてしまっていた。

しかし，上述のように $\hbar$ での形式展開を用いることで，ADHM 構成法を用いることなくなめらかに可換空間上のインスタントンから変形された非可換インスタントン解が構成され，インスタントン数がこの非可換変形に依存しないことが示された [5] ことで，可換な時のインスタントンと非可換インスタントンの関係が明らかになってきた。この非可換インスタントンから出発し，逆に ADHM 方程式を導出することを考えてみる [6]。T^μ を

$$\int_{\mathbb{R}^4} d^4x \frac{1}{2}\left(x^\mu \star \bar{\psi}^\dagger \star \bar{\psi} + \bar{\psi}^\dagger \star \bar{\psi} \star x^\mu\right) \quad (5)$$

と，インスタントンを随伴する Dirac 作用素 $\bar{\mathcal{D}}_A$ の零モード $\bar{\psi}$ を用いて定義する。また，$\tilde{\psi} := {}^t\bar{\psi}\sigma_2$ の漸近的振る舞いから S を

$$\tilde{\psi} = -\frac{g^{-1}Sx^\dagger}{|x|^4} + O(|x|^{-4}), \qquad (6)$$

で定義する。ここで g は $U(N)$ ゲージ群の元である。これらを用いることで以下の定理が得られた。

Theorem 2. A^μ はなめらかに可換インスタントンから変形された非可換インスタントンとし，$\bar{\psi}$ を背景場 A^μ の $\bar{\mathcal{D}}_A$ 作用素の零モードとする。T^μ, S を (5) と (6) で定義するとそれらは ADHM 方程式 (2) を満たす。

また ADHM データと非可換インスタントンの 1 対 1 対応も示された。Dirac 作用素の Index が非可換変形のもとで不変であることも示された。

7. 今後の展望

以上のように，$\mathbb{R}^4$ の非可換変形についてインスタントンの変形の様子を中心に解析を進めてきた。位相不変量が非可換変形で不変である事は $\mathbb{R}^4$ がノンコンパクトであることが主な原因であるように見受けられる。この事は逆に，コンパクトな空間の非可換変形について考えた時に状況が変化する事を示唆している。今後はコンパクトな多様体である $\mathbb{C}P^2$ などの非可換変形とその上でのインスタントンの変形について考察をすすめ，位相不変量が変形を受けるかどうかについて解明をしていく。また，そういった問題を理解するためには低次元のモデルであるボーテックスの場合などについても同様に解析を進める事が有効と思われるので，これについても研究を進める予定である。

謝辞
著者は科研費 No.20740049 の資金的サポートを受けて，この論文に記載されている研究を行った。

参考文献

[1] N. Nekrasov and A. S. Schwarz, “Instantons on noncommutative R^4 and (2,0) superconformal six dimensional theory,” Commun. Math. Phys. **198**, 689 (1998) `hep-th/9802068`.

[2] T. Ishikawa, S. I. Kuroki and A. Sako, “Elongated U(1) instantons on noncommutative $\mathbb{R}^4$,” JHEP **0111**, 068 (2001) `arXiv:hep-th/0109111`.

[3] T. Ishikawa, S. Kuroki and A. Sako, “Instanton number on noncommutative $\mathbb{R}^4$,” `hep-th/0201196`. “Calculation of the Pontrjagin class for U(1) instantons on noncommutative $\mathbb{R}^4$,” JHEP **0208**, 028 (2002) .

[4] A. Sako, “Instanton number of noncommutative U(N) Gauge Theory,” JHEP **0304**, 023 (2003) `hep-th/0209139` .

[5] Y. Maeda, A. Sako, “Noncommutative Deformation of Instantons”, J. Geom. Phys. 58 (2008), pp. 1784-1791 , `airXiv:0805.3373`.

[6] Y. Maeda, A. Sako, “Noncommutative Deformation of Spinor Zero Mode and ADHM Construction”, `airXiv:0910.3441`.

[7] Y. Maeda, A. Sako, “Are vortex numbers preserved?”, J.Geom. Phys. 58 (2008), pp. 967-978 , `math-ph/0612041`.