

交差グラフにおける離散最適化問題を解く 効率的アルゴリズムの開発

本間宏利¹

Development of Efficient Algorithms for Solving of Discrete Optimization Problem on Intersection Graphs

Hirotooshi HONMA

Abstract: The feedback vertex set problem is to find a set of vertices of minimum cardinality whose removal makes the graph acyclic. We presented an $O(n^{2.68} + \gamma n)$ time algorithm for solving the FVS problem on trapezoid graphs, where γ is the total number of factors included in all maximal cliques. Moreover, articulation vertex and hinge vertex problems can be applied to improve the stability and robustness of communication network systems. We proposed linear time algorithms for the articulation vertex problem and the hinge vertex problem of circular permutation graphs.

Key words: Design and analysis of algorithms, Intersection Graphs, Articulation Vertices, Hinge Vertices, Feedback Vertex Set;

1 はじめに

本論では、2012 年度に終了した科学研究費による研究(基盤研究(C) 課題番号 22500020) についてその概要を報告する。

グラフにおける離散最適化問題は、資源配分、スケジューリング、最適配置などの広い分野で精力的に研究され、多くの問題解決において実用化されている。このような背景のもと、研究代表者はこれまでにアルゴリズム設計において、多項式時間アルゴリズムは存在するものの、グラフが大規模になると非常に多くの計算時間を必要とする問題に対して、対象となるグラフを交差グラフのクラスに限定し、それらの上での最適あるいは効率的な並列アルゴリズムを研究、開発してきている。本研究では実システムや問題本質のモデル化等に利用される交差グラフに属するグラフに対して、以下の2つのテーマで研究を行った。

- (1) 台形グラフにおける Feedback 節点集合問題を解く効率的アルゴリズムの開発。
- (2) 環状型置換グラフにおける関節点問題、および、要節点問題を解く最適並列アルゴリズムの開発。

テーマ(1)で扱う台形グラフは区間グラフと置換グラフの両方の特性を含むスーパークラスの交差グラフとして、これまで多くの離散最適化問題で研究対象にされてきている。Feedback 節点集合問題とは、それらをグラフから除去すると、グラフに閉路が存在しなくなるような節点位数最小の節点集合を導出する問題である。この問題は大規模回路解析の簡潔化やコンピュー

タシステム上のデッドロック回避等に応用されている。また、Feedback 節点集合問題は一般のグラフに対しては NP 完全であるが、対象とするグラフを台形グラフに限定することで、効率的なアルゴリズム実現の可能性が高いと考えられる。これまでに Feedback 節点集合問題は区間グラフに対しては $O(n + m)$ 時間、置換グラフに対しては $O(nm)$ 時間のダイナミックプログラミング手法を適用したアルゴリズムが構築されている。本研究では、台形グラフの各極大クリークから閉路を構成する最小の節点を削除する手法で効率的アルゴリズムの開発を試みる。

テーマ(2)で扱う環状型置換グラフは VLSI 結線のイメージをモデル化した環状型置換モデルから導出される交差グラフであり、置換グラフの特性を含むスーパークラスのグラフとして知られている。このグラフはこれまで最大クリーク問題、独立集合問題、認識問題、全域木問題など多くの研究がなされてきている。

関節点とは、ある節点をグラフから削除した時、そのグラフが2つ以上の成分に分断されるような節点を関節点といい、全ての関節点を導出する問題を関節点問題という。また、要節点とは、ある節点をグラフから削除した時、最短距離が今までより長くなるような2つの節点が存在する時、その削除した節点を要節点とよび、そのような全ての要節点を導出する問題を要節点問題という。

要節点はグラフ連結性や最短経路に関わる重要な節点であり、グラフをネットワークと考えた場合、トラフィック伝達の安定的な供給において最重要となるポイントとなる。このように関節点問題や要節点問題はネットワークシステム解析や信頼性、安定性、頑健性の向上に応用されている。

¹釧路高専 情報工学科

2 研究の方法

テーマ(1)の台形グラフにおける Feedback 節点集合問題を解く効率的アルゴリズムの開発では、これまでに開発されてきた他の交差グラフに有効であったダイナミックプログラミングアプローチは、台形グラフに対してはその幾何学的特徴から不向きであることがわかった。そのため、別のアプローチとして台形グラフの全極大クリークと長さ4の単純閉路の集合を導出し、それらの各成分から閉路を構成する最小限の節点を削除する手法で Feedback 節点集合を求めるアルゴリズムを構築した。

以下に具体的な手法を述べる。はじめに与えられた台形グラフを既存の手法により極大クリーク集合へ分解する。また、長さ4の閉路も既存のアルゴリズムにより導出を行う。台形グラフの特性として、閉路長5以上の単純閉路は存在しないため、台形グラフの持つ閉路は、いずれかな極大クリークか長さ4の閉路に含まれることになる。次に位数最小の Feedback 節点集合を導出するが、ここで台形グラフの各節点に対し、その節点を要素に含む極大クリークと長さ4の閉路の総数を求める。これを閉路次数とよぶ。位数最小の Feedback 節点集合を求めるには、閉路次数の大きな節点から優先的に Feedback 節点集合に選べばよいことは明らかである。各極大クリークが無閉路になるためには、極大クリークを構成する節点数より、2個少ない数だけ Feedback 節点集合に加えればよい。この方法より、台形グラフ台形グラフにおける Feedback 節点集合問題を解く効率的アルゴリズムを開発した。

テーマ(2)の環状型置換グラフにおける関節点問題と要節点問題では、環状型置換グラフの部分クラスである置換グラフにおける関節点問題や要節点問題を解く $O(n)$ 時間のアルゴリズムがすでに存在しているので、これらの手法を環状型置換グラフに適宜部分的に応用させる方法を考案した。そのためには、環状型置換モデルをその特性を失わせることなく、意味的に等価な非環状型モデルに展開した拡張環状型置換モデルを構成し、それに対して部分的に既存の手法を適合させる方法を導入した。

以下にアルゴリズムの概略を述べる。置換グラフに対しての関節点を導出するアルゴリズムは、置換グラフに対応する置換モデル上のコードに着目し、あるコードをモデルから除去した時に置換ダイアグラムが2つ以上のコード群に分解されるなら、そのコードに対応する節点を置換グラフの関節点として導出する手法である。我々は、環状型置換グラフへのアルゴリズム拡張にあたり、対応する拡張環状型置換モデルのあるコードを削除した時、拡張環状型置換モデルが3つ以上のコード群に分解されるなら、そのコードに対応する節点が環状型置換グラフの関節点となる規則を証明した。これにより、環状型置換グラフの関節点問題を解くアルゴリズムを開発した。

また、環状型置換グラフの要節点問題でも、すでに置換グラフに対してのアルゴリズムが存在しているため、その環状型置換グラフへの拡張に注力した。要節点はある隣接しない2つの節点に対し、それら両方に隣接する唯一の節点であるという特性を持つ。置換

グラフに対しての要節点問題アルゴリズムは、対応する置換モデルの各コードに対して、この特性が満たされているかどうかを調べ、この条件を満たすコードに対応する節点を要節点として認識する。我々は、環状型置換グラフにおいて、要節点判別のための十分条件を考案し、その十分条件を条件を拡張環状型置換モデルの各コードに適用させる手法で環状型置換グラフの要節点問題を解くアルゴリズムを開発した。

3 研究成果

テーマ(1):台形グラフにおける Feedback 節点集合問題を解く効率的アルゴリズムの開発では、計算量 $O(n^2) + \alpha$ 時間で処理可能な効率的アルゴリズムを構築した。 n は台形グラフの節点数、 α は極大クリークの総数である。このアルゴリズムはジョブ制御のデッドロック解消やフィードバック構造を有する大規模回路解析の簡単化などへの応用が可能である。

テーマ(2):環状型置換グラフにおける関節点問題、および、要節点問題を解く最適並列アルゴリズムの開発では、それぞれの問題に対して仕事量 $O(n)$ 時間で処理可能な最適並列アルゴリズムを構築した。 n は環状型置換グラフの節点数である。これらのアルゴリズムはネットワークシステム解析や信頼性、安定性、頑健性の向上に応用が可能である。

4 発表等

[雑誌論文]

(1) Hirotoishi Honma et al., “A Linear-time Algorithm for Constructing a Spanning Tree on Circular Trapezoid Graphs”, IEICE Trans. Fundamentals, E96A, pp. 1051-1058, 2013.

(2) Hirotoishi Honma et al., “Linear time Algorithms for Finding Articulation and Hinge Vertices of Circular Permutation Graphs”, IEICE Trans. Inf. & Syst., E96D, pp. 419-425, 2013.

(3) Hirotoishi Honma et al., Erratum and Addendum to “A linear time algorithm for finding all hinge vertices of a permutation graph”, Inf. Process. Lett., 111, pp. 891-894, 2011.

(4) Hirotoishi Honma et al., “An Algorithm for Minimum Feedback Vertex Set Problem on a Trapezoid Graph”, IEICE Trans. Fundamentals, E94A, pp. 1381-1385, 2011.

[学会発表]

(1) 本間宏利, 増山繁, Circular permutation graph における要節点導出のための最適並列アルゴリズム, 日本オペレーションズリサーチ学会, 長崎大学, 2010.

(2) 本間宏利, 増山繁, 影響度最大の要節点導出のための効率的アルゴリズム, 日本オペレーションズリサーチ学会, 甲南大学, 2011.

(3) 本間宏利, 増山繁, 環状型台形グラフの全域木導出のための最適アルゴリズム, 日本オペレーションズリサーチ学会, 東京大学, 2013.