複素射影空間・複素双曲空間の変形量子化

梅津　裕志*

Deformation quantization of CP^N and CH^N

Hiroshi UMETSU

Abstract ― Construction of a quantum theory of gravity is one of the most challenging problems in the high energy physics. It is expected that a sort of noncommutative nature in space-time appears at the quantum level. In this article, we study explicit formulas of a deformation quantization with separation of variables for CP^N and CH^N. We also investigate some properties of differentials and integrations in order to construct field theories on these noncommutative spaces. This article is written as a report for summarizing works supported by KAKENHI No.21740197 (Grant-in-Aid for Young Scientists (B)).

Key words ： noncommutative geometry, gauge field theory

１．研究開始当初の背景

重力の量子論の構成を行なう上で、ブラックホールの性質を研究することは重要な役割を果たしてきた。ブラックホールは熱力学的な系と類似した性質を持つことが知られている。特に、ブラックホールは時空の地平の面積に比例した有限のエントロピーを持つと期待されている。このことは重力の量子論において、時空の離散的性質や非可換性が現れることを示唆していると考えられる。

非可換性をもつ時空上の場の理論は、高エネルギーの現象と低エネルギーの現象が混合することや非局所的な観測量を持つなど、特徴的な性質を持つことが知られている。非可換空間の構成法としては、行列模型によるものや、幾何学的量子化、変形量子化の方法などが知られている。

２．研究の目的

ブラックホールの熱力学的性質の普遍性を理解することと、時空がミクロなレベルで持つ離散的性質を明らかにすることが目的である。具体的には、実際に物理量の計算が可能な非可換時空を構成し、非可換性を持つ時空の構造やその空間上の場の理論の性質を解析することを目指した。

３．研究の方法

ミクロなスケールにおいて現われると期待される時空の非可換性について研究した。非可換時空上の場の理論と行列模型を用いて時空の離散的性質を理解することを目指した。非可換時空の構成法としては特に変形量子化を用い、その結果と行列模型による解析との関係を明らかにすることを目指した。具体的には変形量子化の方法を用いて、任意次元の複素射影空間と複素双曲空間上の非可換積を構成する。非可換積の下での関数の代数を調べ、フォック表示を用いて行列模型との比較を行う。また、非可換空間上における微分・積分の性質を調べる。

４．研究成果

*　釧路高専一般教育科

非可換空間の構成について研究を行った。非可換空間を構成する方法はいくつか知られている。一つは行列模型を用いた構成である。行列模型においては、時空の非可換性は行列の非可換性から導かれる。非可換時空上の場の理論は、低エネルギーの現象と高エネルギーの現象が混合する性質を持つことや、非局所的な観測可能量が存在することなど、非可換時空特有の性質が知られている。また、古典解として非可換ソリトンやインスタントンが存在し、これらは場の量子論において重要な寄与を与える。しかし、行列模型によって構成できる非可換空間が限られているため、より一般の非可換空間上で同様な性質が存在するのかどうかは明白でない。

非可換時空の他の構成法として、変形量子化が知られている。この方法では、時空上の場に対して非可換な積を導入することによって時空の非可換性が実現される。非可換積が結合則を満たす条件は一般的には非常に複雑になるため、非可換積を具体的に記述することは多くの場合難しい問題である。

本研究では、Karabegov によって提唱されたケーラー多様体の変形量子化の方法を用いて、任意次元の複素射影空間と複素双曲空間上の非可換積を具体的に構成した。結合則に対応した条件は無限個の微分方程式系として記述され、これを実際に解くことによって場の間の非可換積の具体的な表式を与えた。この表式は非可換変形のパラメータの任意の次数に対して具体的に書かれている。特に、非斉次座標の間の積が、ガウスの超幾何関数によって記述できることを示した。複素射影空間上の非可換積としては、以前に Bordemann などによって与えられたものが知られていた。彼らの与えた非可換積が本研究で得られたものと等価であるかどうかは自明ではないのだが、上記の超幾何関数による記述を用いて等価性を証明した。更に、この非可換積の下での関数の間の代数を詳細に調べた。真空への射影演算子に対応する関数を同定し、それに生成消滅演算子に対応した関数を作用させることにより、フォック表現を構成した。この方法で構成された関数は、閉じた代数を成している。フォック表現を与えている関数の中には射影演算子に対応するものが存在する。非可換空間上のスカラー場の理論をこのフォック表現を用いて構成する場合、射影演算子に対応する関数は非可換ソリトンを記述していると期待される。

変形量子化においては、非可換パラメータは形式的な変数として導入されているが、これを特定の値にとると、ここで構成した非可換空間が Balachandran などによって行列模型を用いて構成された非可換射影空間と一致することが分かった。行列模型で扱われている自由度は、上で述べたフォック表現に対応していることが明らかになった。従って、本研究で構成した非可換射影空間は行列模型による構成の一般化になっていると考えられる。

上で述べた複素射影空間の変形量子化は、複素双曲空間に対しても応用できる。複素双曲空間は非コンパクトな曲がった空間であり、そのような空間の変形量子化はこれまであまり議論されてこなかった。非可換球面などのコンパクトな空間上の非可換場の理論で知られていた性質が、非コンパクトな空間でどうなるのかを研究することが今後重要であると考えられる。

場の理論を構成するためには、非可換空間上での微分・積分を定義しなければならない。本研究で用いる非可換積は座標依存性を持つため、一般の微分演算子は非可換積の下でライプニッツ則を満たさない。我々は、ケーラー多様体の場合はキリングベクトル場のみがライプニッツ則を満たすことを示した。また、非可換積の下での積分の性質を明らかにした。これらの結果を用いて、非可換空間上の場の理論を構成することが出来る。

5． 主な発表論文等

〔雑誌論文〕

① 佐古彰史、鈴木俊哉、梅津裕志：
「Explicit Formulas For Noncommutative Deformations of CP^N and CH^N」
Journal of Mathematical Physics 53 (2012) 073502 16 pages, 査読有

〔学会発表〕

① 梅津裕志：国際会議招待講演
「Explicit Formulas For Noncommutative Deformations of CP^N and CH^N」7th Mathematical Physics Meeting: Summer School and Conference in Modern Mathematical Physics, (2012 年 9 月) (Institute of Physics, University of Belgrade)

② 梅津裕志：国際会議ポスター発表
「Generalized Conformal Symmetry and Recovery of SO(8) in Multiple M2 and D2 Branes」 XVI International Congress on Mathematical Physics, (2009 年 8 月)、プラハ Clarion Congress Hotel Prague