有向グラフの辺彩色問題とその応用について

河合　博之*

Arc-colorings of a directed graph and its applications

Hiroyuki KAWAI

Abstract – The coloring problem of graphs have been widely studied and have many applications including the Four Color Problem. In this report, some types of arc-colorings of a digraph are introdeuced in terms of its adjacency. It is also shown that a kind of arc-cloring of a digraph gives an acyclic coloring of an underlying graph of a line dgraph. Then, the feedback vertex set problem of the families of de Bruijn graphs and Kautz graphs is disscused.

Keywords：arc coloring, acyclic coloring, feedback vertex set, line digraph

１．はじめに

グラフの彩色問題は，さまざまな関係をグラフによりモデル化し，問題を定式化することで問題を解決することができる．例えば，どのような地図も四色あれば隣接する領域を異なる色で塗り分けることができる「四色問題」は良く知られている．地図は平面グラフによりモデル化され，グラフの頂点彩色に対応している．図2のグラフは図1の地図の塗り分けに対応する頂点彩色されたグラフである．各頂点は地図の領域に対応し，地図の二つの領域が隣接するとき対応する二頂点間に辺が存在しており，隣接する頂点は異なる色（数字）が割り当てられている．

一般にグラフの彩色とは，グラフの構成要素である頂点や辺に対する色の割当てであり，それらの隣接性が彩色条件とされる．　つまり，二つの隣接している頂点または辺に異なる色を割り当てる，　ということが色の割り当ての条件となる．彩色問題の目的は，できるだけ少ない色数を割り当てる最適化問題であるため，一般には．効率の良いアルゴリズムは知られていない．向きのない無向グラフには，頂点彩色，辺彩色

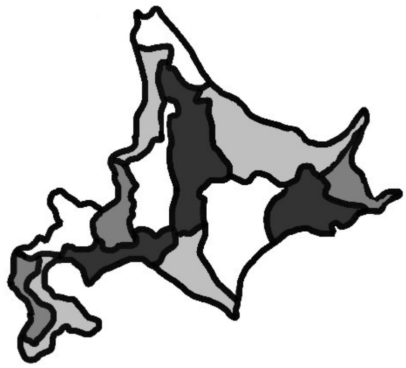

図 1：地図の塗り分け

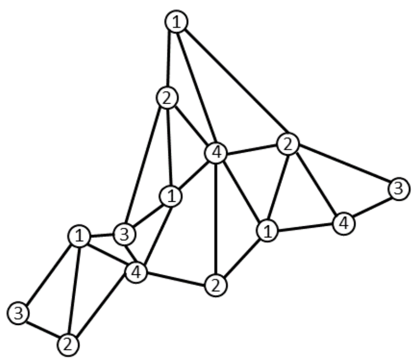

図 2：グラフの頂点彩色

および全彩色（頂点と辺をそれぞれ彩色）などいくつかの彩色問題が存在する．本研究では，有向グラフの

*　釧路高専情報工学科

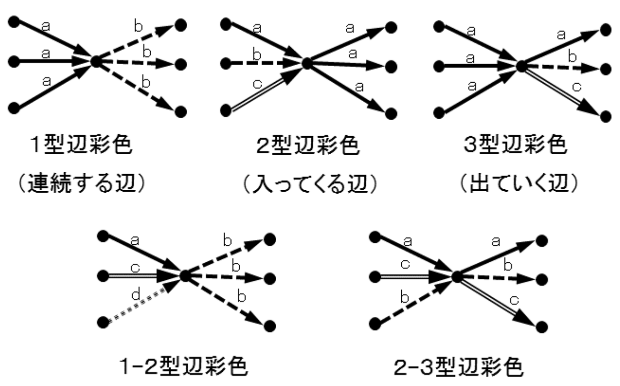

図 3: 有向グラフの辺彩色の型

辺彩色を有向辺の隣接種類ごとに各タイプに分類し，それらを利用した応用問題について考察する．

２．有向グラフの辺彩色

有向グラフとは，辺に向きのあるグラフである．無向グラフでは，頂点または辺の隣接関係が明確である一方，有向グラフの辺彩色の条件となる隣接性は，有向辺の向きを考慮することによっていくつかのタイプに分類することができる．いま C を色集合とし，有向グラフ $D=(V,E)$ の辺の色への割り当て $\mathrm{f}: E \to C$ を考える．任意の異なる二つの有向辺 $(u,v),(w,x) \in E(D)$ を異なる色で割り当てる，つまり，$\mathrm{f}(u,v) \neq \mathrm{f}(w,x)$ となるための条件として，二つの有向辺に関する，次の三つの隣接性による辺彩色の型を定義することができる．

１型：$v=w$ のとき（連続する有向辺）
２型：$v=x$ のとき（各頂点に入ってくる有向辺）
３型：$u=w$ のとき（各頂点から出ていく有向辺）

さらに，これら三つの型を組合わせることで有向グラフの辺彩色は７つの型に分類される．図３に有向グラフの辺彩色の基本となる三つの型および複合型の例を示す．ここで，１−２型とは１型および２型の条件を満たす彩色であり，つまり連続する有向辺または各頂点に入ってくる有向辺に異なる色を割り当てるものである．これまでの研究において例えば，[2], [5], [8] では１型辺彩色を，[6] は１−２型，[1] は２-３型，そして [7] は２型辺彩色を扱っている．これら有向辺の辺彩色に基づき，グラフの分解をはじめとするいくつかの応用が知られている．

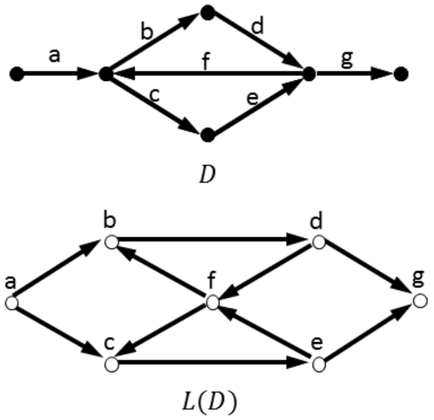
図 4: ラインダイグラフ $L(D)$

３．ラインダイグラフ演算と１型辺彩色

有向グラフ $D=(V,E)$ のラインダイグラフ $L(D)$ とは，頂点集合として D の有向辺集合 E を持ち，頂点 (u,v) から頂点 (w,x) へ有向辺が存在するのは $v=w$ のときかつそのときに限る．この有向グラフ D から $L(D)$ を作りだす操作をラインダイグラフ演算と呼ぶ．図４にラインダイグラフの例を示す．D の有向辺集合が $L(D)$ の頂点集合に対応しており，例えば D の二つの有向辺 a と b は連続しているため，$L(D)$ において a から b に有向辺が存在している．ラインダイグラフの定義から有向グラフ D の１型辺彩色は $L(D)$ の頂点彩色に対応することがすぐにわかる．de Bruijn ダイグラフや Kautz ダイグラフはラインダイグラフ演算で定義可能であり，その性質を利用した研究が複数存在する（[1], [6], [7], [8]）．

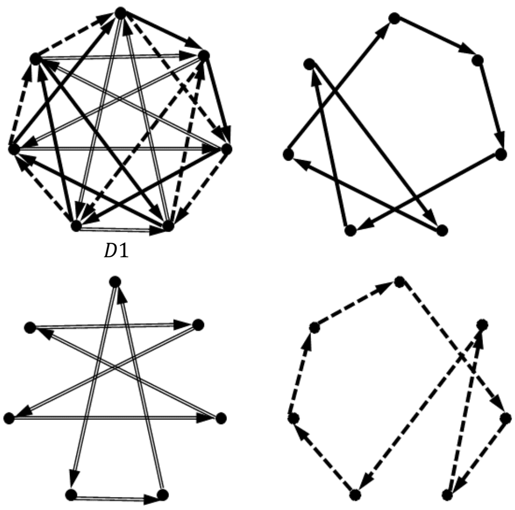
図 5: 有向グラフ$D1$の 2–3 型辺彩色と１因子分解

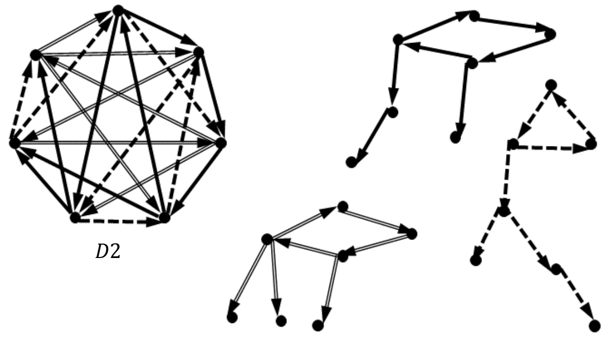

図 6: 有向グラフ$D2$の２型辺彩色と cycle-rooted 木分解

４．辺彩色に基づく有向グラフの分解

有向グラフの辺彩色に基づき，有向グラフを各辺の色ごとに分解することができる．２−３型辺彩色は，各頂点に入ってくる有向辺および各頂点から出ていく有向辺を異なる色に割り当てるため，d 正則有向グラフの d 個の１因子分解に対応する．図５は有向グラフ $D1$ が２−３型辺彩色によって三つの有向サイクルに分解できることを示している．また２型辺彩色では cycle-rooted 木（すべての頂点に入ってくる有向辺がちょうど一本）と呼ばれる部分グラフに分解可能である（図６）[7]. 一方 1型辺彩色は，有向グラフの無閉路有向部分グラフによる分解を意味する．

５．ラインダイグラフの彩色とFVS

有向グラフ D のラインダイグラフ $L(D)$ について，１型辺彩色が $L(D)$ の頂点彩色と等価な関係を表すように，ラインダイグラフの“ある彩色”とフィードバック頂点集合（FVS）との関係を示すことができる．

無向グラフ G の無閉路彩色とは，隣接する二頂点は異なる色で割当てられ，かつどの２色から誘導される部分グラフも閉路を持たない G の頂点彩色である．図７に無向グラフ $G3$ の無閉路彩色の例を示す．$G3$ は３色で頂点彩色されており，２色による３種類の部分グラフは閉路を持たない．無向グラフと同様に，有向グラフ D に対しても有向閉路を持たないような D の無閉路彩色や無閉路辺彩色の定義が可能である．有向グラフ D の i 型無閉路辺彩色 $(1 \leq i \leq 7)$ とは，D の i 型辺彩色であり，どの２色で誘導された有向部分グラフも有向サイクルを持たない．本研究では，有向グラフの１−２型辺彩色を４型と呼ぶこととし，４型無閉路辺彩色と次で定義されるFVSとの関係について考察する．

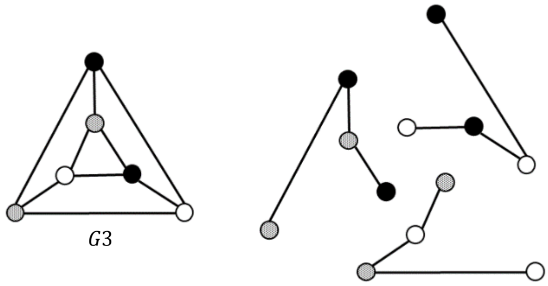

図 7: グラフの無閉路彩色

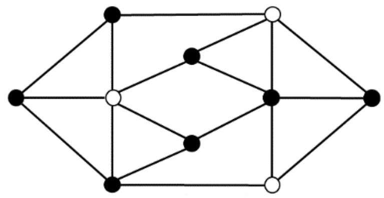

図 8: フィードバック頂点集合

無向グラフ $G = (V, E)$ のフィードバック頂点集合（FVS）とは，$V \setminus S$ が誘導する G の部分グラフが閉路を持たないような V の部分集合 S である．最小濃度のFVSはMFVSと呼ばれる．グラフ図８はグラフのFVSの例を示しており，グラフ$G4$ の白抜きの頂点３個がMFVSの一つである．一般の無向グラフに対しMFVSを求める問題はNP困難であるため，さまざまなグラフの族に対しての研究がなされている（[4], [9], [10]）．グラフの無閉路彩色とFVSとの関係は [3] によって研究されており，例えば，グラフ G が３色で無閉路彩色可能ならば G は高々 $|V(G)|/3$ 個の頂点からなるFVSを持つ．なぜなら，任意の１色を除去しても G は閉路を持たないからである．次の定理１は，有向グラフ D の４型無閉路辺彩色とそのラインダイグラフ $L(D)$ の無閉路彩色の関係を示している．ここで，有向グラフ D に対し $U(D)$ は D の底グラフ（有向辺を無向辺に置き換えたもの）を表す．

定理１．D を自己ループを許す有向グラフとする．このとき，D が k 色の４型無閉路辺彩色を持つならば，$U(L(D))$ は k 色で無閉路彩色可能である．ただし，出次数 0 の頂点に入ってくる辺の色に制限はないものとする．さらに $L(D)$もまた k 色の４型無閉路辺彩色を持つ． □

定理１を応用することにより，ラインダイグラフの底グラフ $U(L(D))$ のフィードバック頂点集合を求める

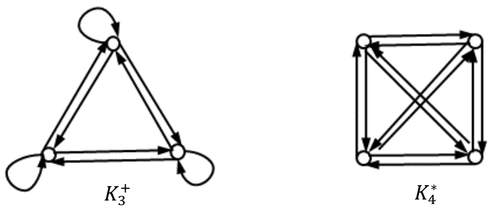

図 9：完全有向グラフ，完全対称有向グラフ

ことができる．つまり，有向グラフ D の部分グラフの有向辺を２色で４型辺彩色すれば，この２色に対応する $U(L(D))$ の頂点集合がFVSとなるからである．図９の有向グラフ D は４色による４型無閉路辺彩色がなされており，その対応する色によって $\mathrm{U}(L(D))$ は４色により無閉路彩色されていることがわかる．

de Bruijn ダイグラフ $B(d,D)$ と Kautz ダイグラフ $K(d,D)$ は，完全有向グラフに対し，ラインダイグラフ演算から再帰的に定義可能なグラフの族であり，それぞれ，

$$B(d,D)=L(B(d,D-1)), B(d,1)=K_d^+,$$
$$K(d,D)=L(K(d,D-1)), K(d,1)=K_{d+1}^*,$$
$$d\geq 2, D\geq 2.$$

と表される．ここで，K_d^+ と K_d^* はそれぞれ完全ダイグラフと完全対称ダイグラフを表す．図９にオーダー３の完全有向グラフとオーダー４の完全対称有向グラフを示す．ラインダイグラフの定義に対し，定理１を応用するとラインダイグラフの族の底グラフに関するFVSを求めることができる．無向 de Bruijnグラフと無向 Kautzグラフ（図１０）のFVSはそれぞれ [10], [9] で研究されているが，定理１をそれぞれ，$B(d,D)$ および $K(d,D)$ に適切に応用することによって，[9], [10]の結果を改善することが可能となった．

６．まとめ

本稿では，有向グラフの辺彩色の分類について示すとともに，それらをグラフの分解やFVS問題へと応用することについて考察した．無閉路彩色とFVSとの関係は研究されていたが，有向辺の彩色を用いたラインダイグラフの無閉路彩色およびFVSに関する新たな考察により，de Bruijnグラフや Kautzグラフといったラインダイグラフの族に対するFVS問題の既知の上界を改善することができた．今後は，バタフライと呼ばれる族をはじめとする，その他のラインダイグラフの族に対しての応用も期待される．

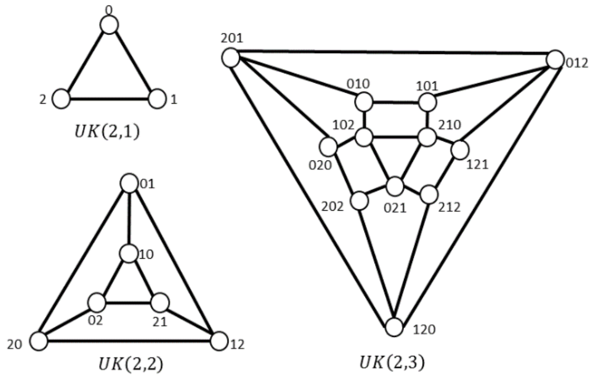

図 10：無向 Kautz グラフ

参考文献

[1] Bermond, J.C., and Hell, P.: On even factorization and the chromatic index of the Kautz and de Bruijn digraphs, J. Graph Theory, Vol. 17, No. 5, pp. 647–655 (1993).

[2] Bessy, S., Havet, F., and Birmel´e E.: Arc-chromatic number of digraphs in which each vertex has bounded outdegree or bounded indegree, J. Graph Theory, Vol. 53, No. 4, pp. 315–332 (2006).

[3] Fertin, G., Godard, E., and Raspaud, A.: Minimum feedback vertex set and acyclic coloring, Information Processing Letters, Vol. 84, pp. 131–139 (2002).

[4] Focardi, R., Luccio, F.L., and Peleg, D.: Feedback vertex set in hypercubes, Information Processing Letters, Vol. 76, pp. 1–5 (2000).

[5] Harner, C.C., and Entringer, R.C.: Arc coloring of digraphs, J. Combininatorial Theory B, Vol. 13, pp. 219–225 (1972).

[6] Hasunuma, T.: Embedding iterated line digraphs in books, Networks, Vol. 40, No. 2, pp. 51–62 (2002).

[7] Kawai, H., Fujikake, N., and Shibata, Y.: Factorization of de Bruijn digraphs by cycle-rooted trees, Information Processing Letters, Vol. 77, No. 5–6, pp. 269–275 (2001).

[8] Kawai, H., and Shibata, Y.: The chromatic number and the chromatic index of de Bruijn and Kautz digraphs, Trans. IEICE, Vol. E85–A, No. 6, pp. 1352–1358 (2002).

[9] Xu, X.-R., Wang, J., Xu, J.-M., and Cao, Y.-C.: Feedback numbers of Kautz undirected graphs, Australasian J. combinatorics, Vol. 52, pp. 3–9 (2012).

[10] Xu, X.-R., Xu, J.-M., and Cao, Y.-C.: Bounds on feedback numbers of de Bruijn graphs, Taiwanese J. Math., Vol. 15, No. 3, pp. 1101–1113 (2011).