質量変形された超対称ヤン-ミルズ理論の構成

加藤　順司 *　・　近藤　陽志 **　・　宮毛　明子 *

Construction of mass deformation of twisted super Yang-Mills theory

Junji KATO　　Yoshi KONDO　　Akiko MIYAKE

Abstract - We study a mass deformation of twisted super Yang-Mills (SYM) theories in several models. We show that the mass deformation method can be applied to several twisted SYM models with two scalar supercharges and that classical solutions of these models with flat direction are changed into the fuzzy sphere solution which solve the flat direction problem. One of these models, the two dimensional mass deformed A-model, preserves four supersymmetries. This fact indicates that other twisted super Yang-Mills theories may possess higher supersymmetries after the deformation. We therefore investigate the mass deformed theories with higher supersymmetries.
Key words : Supersymmetry, Topological Field Theory, Lattice Gauge Theory.

1. はじめに

現在，電子や陽子などの非常に小さな物質を扱う理論に素粒子標準模型がある。標準模型は荷電粒子に働く電磁相互作用，ベータ崩壊を起こす弱い相互作用と原子核内部でクォークに働く強い相互作用を含む統一的な理論となっている。この標準模型は実験結果を大変よく再現していることが知られていたが，自発的対称性の破れによって素粒子に質量を与えると考えられていたヒッグス粒子が長い間未発見の状態であった。しかし，大型ハドロン衝突型加速器 (LHC) での実験が始まり，2012 年にヒッグス粒子が発見され標準模型の信頼性はさらに高くなったと考えられる。しかしながら，標準模型にもいくつか不十分に思われることがある。そのうちの一つがゲージ階層性の問題である。例えばヒッグス粒子の質量を計算するときには質量が発散してしまうのを避けるため繰り込みと呼ばれる計算手法がとられる。この手法によると大きな裸のヒッグス粒子の質量からから大きな量子補正を引くことで 10 桁以上小さい質量を導出している。これは大変大きな数から大きな数の引き算を行いその結果として小さな値を出している。これは理論に含まれるパラメーターを精密に調整しているので少し不自然な感じがある。さらには暗黒物質の問題がある。宇宙の観測精度が飛躍的に向上し宇宙の構成要素に関してより精密なことが分かってきた。宇宙全体のエネルギー密度のうち通常の物質が 4.9 ％であり，暗黒物質が 26.8 ％含まれており，それ以外は暗黒エネルギーとなる。この暗黒物質は，光などの電磁波で観測できない未知の物質を指す言葉で，暗黒エネルギーも同様で未知のエネルギーである。暗黒物質の候補になる粒子が標準模型に含まれる粒子では不十分であることが知られている。これらの観点から標準模型の拡張を考えなければならない状況になっている。また LHC 実験では 2015 年よ

* 釧路高専一般教育科
** 北海道大学大学院理学院

り粒子の衝突エネルギーをさらに上げた実験も開始され，標準模型を超える新たな物理現象の探索も期待されている。

2. 超対称性

標準模型は性質の異なる 2 種類の粒子を含んでいる。一つは電子やクォークなどの物質となるフェルミ粒子であり，もう一つは光 (光子) などの力を媒介するボース粒子である。上述のゲージ階層性の問題を解決するために導入されたのが超対称性で，フェルミ粒子とボース粒子を関係づける変換である。この変換の下で不変となるように標準模型を拡張したものを超対称標準模型と呼び，標準模型に含まれる粒子と性質が同じで統計性の異なる超対称性粒子が現れる。標準模型は 3 つの異なる相互作用を含んでおり各々独立に結合定数が存在しているが，超対称性を導入するとその 3 つの結合定数が高エネルギー領域で 1 点で交わることが分かった。これは高エネルギー領域において力が統一された理論が存在する可能性を示唆しており，統一理論の観点からも大変興味深いものとなっている。また超対称性があると統計性が逆の粒子による量子補正の間に打ち消しが起こり最終的な量子補正が小さくなることが知られており，ゲージ階層性の問題の解決が期待される。さらには，超対称性粒子には暗黒物質の候補となる電磁相互作用をほとんどしない質量をもつ粒子があり，暗黒物質の有力な候補と考えられている。

しかしながら，超対称性粒子は現在の素粒子実験では発見されていないので，何らかの方法で超対称性が破れて超対称性粒子は重くなってしまっていると考えられている。現在，LHC において粒子の衝突エネルギーが 13[TeV] となる高エネルギーでの実験が開始され超対称性を始めとする新しい物理の発見が期待されている状況にあり，超対称性理論の研究の重要性が高まっていると考えられる。

3. 超対称性と位相的ツイスト

我々が研究の対象としている理論は超対称性理論の中でもより高い対称性を持つものである。一般に複数の超対称性をもつ理論を構成することが可能で時空間の次元を決めると超対称性の数の最大値が決まってしまう。例えば 4 次元では最大の対称性をもつものを $N=4$ 超対称ヤン-ミルズ理論という。このとき　R 対称性と呼ばれる超対称性の種類を入れ替える内部対称性があり最大で $SU(4)$ 群をとる。ここで，超対称性の変換を生成する演算子を

$$Q_{\alpha i},$$

とする。α はスピノール，i は R 対称性を表す添字である。このような R 対称性をもつ超対称性理論からウィッテンによって定式化された位相的ツイストの操作によりある種の位相的場の理論を構成することが可能である [1]。この操作はスピノールの $SO(4)$ と R 対称性の $SO(4)_I$ を同一視することで実現でき，以下のようにガンマ行列の完全系で展開される。

$$Q_{\alpha i}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\mathbf{1}s+\gamma^{\mu}s_{\mu}+\gamma^{\mu\nu}s_{\mu\nu}+\tilde{\gamma}^{\mu}\tilde{s}_{\mu}+\gamma_5\tilde{s}\Big)_{\alpha i},$$

このときの i と α は同じ $SO(4)$ に属していると考えている。このフェルミオンの対応関係はディラック-ケーラーフェルミオンと呼ばれている [2]。この対応関係の右辺に現れる $s, s_{\mu}, s_{\mu\nu}, \tilde{s}_{\mu}, \tilde{s}$ はフェルミオン的な量のテンソルになっており，特に s はゲージ理論の量子化で現れる BRST チャージとなる。この操作をその他の場に対して実行すると位相的場の理論の作用やツイストされた超対称変換などが得られる。また，この操作は複数の可能性があり各次元で調べられている [3, 4, 5, 6]。これらの位相的場の理論は位相不変量，ミラー対称性などと関連があり数学的にも大変興味を持たれており精力的に研究されている分野である。さらに，このディラック-ケーラーフェルミオンは数値計算の 1 つの手法である格子ゲージ理論でフェルミオンを定義するときに用いられるスタッガードフェルミオン，Kogut-Susskind フェルミオンの連続極限に対応している [7, 8, 9]。

4. 超対称格子ゲージ理論

量子電磁力学 (QED) などのゲージ理論の物理量は基本的に摂動論で計算することが可能であるが，量子

色力学（QCD）のようなヤン-ミルズ理論では強結合領域は摂動計算では取り扱えないので別な方法を考えなければならない。その一つの方法として格子ゲージ理論がある。格子ゲージ理論は空間を離散的な格子状に分割してゲージ対称性を保つように定式化された理論である。この理論は数値計算が可能であり，実際に QCD のハドロンの質量計算などへ応用され，実験事実を再現していることが確認されている。しかしながら，超対称性理論を格子上で定式化するには問題が生じる。超対称性の生成子は以下の反交換関係を満たさなければならない。

$$\{Q^i_\alpha, \overline{Q}^j_{\dot\beta}\} = 2\delta^{ij}\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}P_\mu. \tag{1}$$

Q^i_α， $\overline{Q}^j_{\dot\beta}$ は超対称変換の生成子，P_μ は運動量の生成子である。ただし，$\alpha, \dot\beta = 1, 2$，$i, \mu = 1, 2, 3, 4$ であり，P_μ は微分演算子で表す場合には $-i\partial_\mu$ となる。格子上では，この微分演算子がライプニッツ則を満たさないので単純な差分表現では超対称性を持つ理論を格子上で定式化することができない。ここでは全ての超対称性を格子上で定式化することを断念する。つまり反交換関係 (1) 式の運動量演算子を含まない部分代数を考えその部分のみを保つようにする。ここでは最大の超対称性を考えているので元々の独立な超対称性の生成子の数は 16 個であり (ヴァッファ-ウィッテン理論の場合) 以下の代数に従う，

$$\begin{aligned} \{s, s_\mu\} &= P_\mu, \qquad \{s_\mu, s_{\rho\sigma}\} = -\delta^+_{\rho\sigma,\mu\nu}P^\nu, \\ \{\overline{s}, \overline{s}_\mu\} &= P_\mu, \qquad \{\overline{s}_\mu, \overline{s}_{\rho\sigma}\} = -\delta^+_{\rho\sigma,\mu\nu}P^\nu. \end{aligned} \tag{2}$$

ここで，$\delta^+_{\mu\nu,\rho\sigma} = \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho} - \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ であり，その他の反交換関係は全てゼロとなる。この (2) 式をツイストされた超対称代数と呼ぶ。ツイストされた超対称電荷 $s, \overline{s}, s_\mu, \overline{s}_\mu, s_{\mu\nu}, \overline{s}_{\mu\nu}$ は，$Q^i_\alpha, \overline{Q}^j_{\dot\beta}$ の線形結合をとって定義することができる（位相的ツイスト）。具体的には s のみ保つ場合や $s, \overline{s}$ を保つ場合などが考えらる。このとき，P_μ を含まない最大の部分代数としては，$s, \overline{s}, s_{\mu\nu}, \overline{s}_{\mu\nu}$ の 8 個の超対称性を保つ場合が考えらる。そこで，以降は $s, \overline{s}$ の 2 個保つ場合を考える。実際に，2 次元の場合には超対称性が低い場合の超対称格子理論が定式化されている。

5. 質量変形の方法

超対称性理論を格子上で定式化するとき微分演算子がライプニッツ則を満たさないので単純には格子化できない。そこで微分演算子を反交換関係に含まない部分代数を用いることでこの問題を回避することが可能である。しかしながら，ヴァッファ-ウィッテン理論などの対称性が最大の場合にはさらに問題が生じる。具体的な超対称性をもつ作用の形は省略するが，この作用の古典解を調べてみると，ポテンシャルを最低にする解に３つの任意定数が存在することが分かる。これは同じエネルギーをもつ状態が無限にあることを示しており，平坦な方向と呼ばれる。状態が無限に縮退していると数値計算の過程で同じ寄与を無限に数えてしまい数値計算が破たんしてしまう。これを平坦な方向の問題という。これを解決する方法が質量変形の方法である [10]。この方法は質量を表すパラメーター m を導入し超対称変換を m に比例する分だけ変更することにより作用に質量項が現れるようにする。ここで導入された新しいポテンシャル項のために平坦な方向はなくなり新たな古典解である非可換球面解が得られる。論文 [11] では，２次元の超対称性を 16 個持つ模型に対して提案された質量変形の方法を高次元の４次元，３次元の超対称性をもつ理論に応用した。その結果，４次元ヴァッファ-ウィッテン理論とそれを３次元に次元還元した理論については質量変形が可能であることを示し，両者とも非可換球面解をもつことが分かった。４次元で超対称性を１６個保つマーカスの理論では２つのスカラー電荷を保つ質量変形はこのままでは実行できないことを示した。また，超対称性が８個の模型に対しては４次元のドナルドソン-ウィッテン理論を次元還元した３次元 A 模型とそれとは別の３次元 B 模型についても質量変形が可能であることを示した。さらに各々の次元還元した２次元の模型でも可能であることを示した。

6. まとめと展望

論文 [11] で構成した質量変形された模型をまとめると、超対称性が最大の場合には，4 次元ヴァッファ-ウィッテン理論とそれを次元還元した 3 次元 N=8 ツ

イストされた超対称ヤン-ミルズ理論で質量変形が可能である。また超対称性が半分の場合には，4 次元ドナルドソン-ウィッテン理論を次元還元した２，３次元 A 模型と，さらに 3 次元ヤン-ミルズ理論の B 模型とそれを次元還元した 2 次元について質量変形された模型を導出した。いずれの場合も 2 つの超対称性を保ち古典解に非可換球面解をもつことを示した。これらの模型は数値計算をする場合に起こる平坦な方向の問題が生じないため，格子ゲージ理論への応用が期待される。実際に２次元の質量変形された模型の数値計算が行われており連続極限ですべての超対称性が回復することが示された [12]。また、２次元の超対称性が８個の A 模型において超対称性を４個保つ質量変形が可能であることが示されており、同様の B 模型に対して４個の超対称性をもつ質量変形の方法が可能であることが確認できた。このことは高次元の模型においてもより高い超対称性を保つ質量変形の方法が可能であることを示唆している。高次元の超対称格子模型では超対称性の数が少ないと模型に含まれるパラメーターが増えてしまいこのパラメーターの微調整が問題になる。そのため、このような対称性の高い模型を構成することが重要となる。現在、超対称性が最大のもので部分代数に運動量演算子を含まない最大の模型の質量変形の方法を研究している。

参考文献

[1] E. Witten, Commun. Math. Phys. 117 (1988) 353.

[2] E. Kähler, Rend. Math. Appl. 21 (1962) 425.

[3] N. Marcus, Nucl. Phys. B452 (1995) 331.

[4] J. P. Yamron, Phys. Lett. B213 (1988) 325.

[5] C. Vafa and E. Witten, Nucl. Phys. B431 (1994) 3.

[6] Junji Kato, Noboru Kawamoto, Yukiya Uchida Int.J.Mod.Phys. A19 (2004) 2149-2182

[7] J. Kogut and L. Susskind, Phys. Rev. D11 (1975) 395.

[8] L. Susskind, Phys. Rev. D16 (1977) 3031.

[9] N. Kawamoto and J. Smit, Nucl. Phys. B192 (1981) 100.

[10] M. Hanada, S. Matsuura, F. Sugino, Prog. Theor. Phys. 126 (2011), 597-611

[11] J. Kato, Y. Kondo, A. Miyake, JHEP 1109(2011)019

[12] E. Giguère, D. Kadoh, JHEP 1505(2015) 082