確率外力を持つ単独保存則方程式について

登口　大*

On scalar conservation laws with stochastic forcing

Dai NOBORIGUCHI

Abstract: In this report, we introduce the Cauchy problem for a scalar conservation law with a multiplicative noise. We use a notion of kinetic formulation. This leads to a well-posedness theory for kinetic solutions.
Key words: Stochastic partial differential equations, Conservation laws, Kinetic formulation, Initial value problem.

1　導入

本論文では次の確率外力を持つ単独保存則方程式 (以下, 確率保存則方程式) を考察する:

$$\begin{aligned} du + \operatorname{div}(A(u))dt &= g(x,u)d\beta(t) \\ u(x,0) &= u_0(x). \end{aligned} \tag{1.1}$$

ここで, $u(x,t)$ は時空変数 (x,t) に関する未知関数である. 時間変数については有限時間区間上で, 空間変数については周期領域上で方程式 (1.1) について考察する. すなわち, $T>0$ に対して $t \in [0,T)$, $\mathbb{T}^d = [0,1]^d$ を d-次元トーラスとして, $x \in \mathbb{T}^d$ とする. β は一次元ブラウン運動とする.

$g=0$ のとき, 方程式 (1.1) は (決定論的) 保存則方程式となる. 保存則方程式は交通や氷河の流れなどの記述に応用され, 長期にわたり研究され続けている重要な問題である. 確率外力項を持つ保存則方程式を考えることは物理学や工学において応用上自然な要請あり, 現在最も盛んに研究されているテーマの一つである.

保存則方程式の解は, 一般に, 大域的な古典解の存在が得られない. そればかりでなく, 弱解 (超関数解) の一意性も破綻してしまうことが知られている. 複数存在する弱解の中から物理的に意味を持つ解を一つだけ抽出するために, エントロピー解なる概念が導入され, さらに細かく解の性質を解明するためにキネティック解の概念が導入された. 本論文においても先行研究にしたがって, キネティック解の概念を用いる.

方程式 (1.1) のキネティック解の一意存在性, 軌道の連続性は Debussche, Vovelle [1] により与えられた. 特に, 解の存在性については粘性項消滅法により与えられた. これは確率保存則方程式の解が満たす Reduction theorem ([1, Theorem 11] 参照) なる性質を上手く利用した方法であり, 確率保存則方程式を含む一般化された方程式には適用できないものである. 一方, 本研究では解の存在性の証明のために, 時間分割法を適用する. この方法にでは放物-双曲型確率偏微分方程式などの確率保存則方程式を含む方程式に

*釧路工業高等専門学校
noboriguchi@kushiro-ct.ac.jp

対しても適用できることが分かっている ([2] 参照). 本論文では簡単のため, 確率保存則方程式に対して時間分割法を紹介する.

本論文における仮定を述べる.

(H_1) フラックス関数 $A:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^d$ は C^2-級関数であり, その導関数 $a=(a_1,\dots,a_d)$ は高々多項式的増大関数とする. すなわち, ある定数 $C\geq 0$ と $p\geq 1$ で

$$|a(\xi)|\leq C(1+|\xi|^p)$$

なるものが存在するとする.

(H_2) 関数 $g:\mathbb{T}^d\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は次の連続性と増大条件を持つものとする: ある定数 $C\geq 0$ で, 全ての $x,y\in\mathbb{T}^d$, $\xi,\zeta\in\mathbb{R}$ に対して,

$$\begin{aligned}|g(x,\xi)|&\leq C(1+|\xi|)\\ |g(x,\xi)-g(y,\zeta)|^2&\\ \leq C(|x-y|^2&+|\xi-\zeta|r(|\xi-\zeta|)).\end{aligned}$$

ここで, r は非減少連続関数で $r(0)=r$ なるものとする.

(H_1) の仮定は解を L^p 空間の枠組み捕らえるための仮定であり, (H_2) は Itô 確率積分

$$\int_0^T g(x,u(x,t))\ d\beta(t),\qquad u\in L^2(\mathbb{T}^d\times[0,T))$$

が定義されるための仮定であることに注意しておく.

2 解の定義

定義 2.1 (キネティック測度)**.** Ω から $\mathbb{T}^d\times[0,T)\times\mathbb{R}$ 上の非負有界測度の集合 $\mathcal{M}_b^+(\mathbb{T}^d\times[0,T)\times\mathbb{R})$ への写像 m がキネティック測度であるとは次の (i)-(iii) を満たすときをいう.

(i) m は次の意味で可測である: 各 $\varphi\in C_b(\mathbb{T}^d\times[0,T]\times\mathbb{R})$ に対して, 写像 $m(\varphi):\Omega\to\mathbb{R}$ は可測,

(ii) m は次の意味で ξ について減衰する: $B_R=\{\xi\in\mathbb{R};|\xi|<R\}$ とするとき,

$$\lim_{R\to\infty}\mathbb{E}m(\mathbb{T}^d\times[0,T)\times B_R^c)=0,$$

(iii) 任意の $\varphi\in C_c(\mathbb{T}^d\times\mathbb{R})$ に対して, 確率過程

$$(\omega,t)\mapsto\int_{\mathbb{T}^d\times[0,t]\times\mathbb{R}}\psi(x,\xi)\ dm(x,s,\xi)$$

は可予測.

今, 解の定義を与えるために, 関数 $f^\pm:\mathbb{R}^2\to\{0,1\}$ を次で定義する:

$$f^+(u,\xi)=\begin{cases}1 & (\xi<u)\\ 0 & (\xi\geq u),\end{cases}$$

$$f^-(u,\xi)=\begin{cases}-1 & (\xi>u)\\ 0 & (\xi\leq u).\end{cases}$$

定義 2.2 (キネティック解)**.** 全ての $p\in[1,\infty)$ に対して,

$$u\in L^p(\Omega\times(0,T),\mathcal{P},dP\otimes dt;L^p(\mathbb{T}^d))\cap L^p(\Omega;L^\infty(0,T;L^p(\mathbb{T}^d)))$$

とする. このとき, u が初期条件 u_0 に対する方程式 (1.1) のキネティック解であるとは, あるキネティック測度 m で u が次のキネティック公式を満たすものが存在するときをいう: 全ての $\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{T}^d\times[0,T)\times\mathbb{R})$ に対して,

P-a.s.,

$$\int_0^T\int_{\mathbb{T}^d}\int_{\mathbb{R}} f^{\pm}(u,\xi)(\partial_t + a(\xi)\cdot\nabla)\varphi\ d\xi dx dt$$
$$\int_{\mathbb{T}^d}\int_{\mathbb{R}} f^{\pm}(u_0(x),\xi)\varphi(x,0,\xi)\ d\xi dx$$
$$= -\int_0^T\int_{\mathbb{T}^d} g(x,u)\varphi(x,t,u)\ dx d\beta(t)$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\mathbb{T}^d} g^2(x,u)\partial_\xi\varphi(x,t,u)\ dx dt$$
$$+\int_{\mathbb{T}^d\times[0,T]\times\mathbb{R}} \partial_\xi\varphi(x,t,\xi)\ dm(x,t,\xi). \tag{2.1}$$

3 時間分割法

この節では, 近似解の構成方法について説明する. 次の二つの方程式を考える: $0 \le s < t \le T$ に対して,

$$\begin{cases} dv = g(x,v)d\beta(t) \\ v(\cdot,s) = v_s(\cdot), \end{cases} \tag{3.1}$$

$$\begin{cases} \partial_t w + \mathrm{div}(A(w)) = 0 \\ w(\cdot,s) = w_s(\cdot). \end{cases} \tag{3.2}$$

$R(t,s)$ と $S(t-s)$ をそれぞれ方程式 (3.1) と (3.2) の解作用素とする. すなわち,

$$v(t,s) = R(t,s)v_s, \quad w(t,s) = S(t-s)w_s$$

と書ける. ここで, 方程式 (3.1) の解 v について次が成り立つ. 任意の $t \in [s,T)$, $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{T}^d\times\mathbb{R})$ に対して,

$$\begin{aligned} &-\int_{\mathbb{T}^d}\int_{\mathbb{R}} f^{\pm}(v(t),\xi)\varphi(x,\xi)\ d\xi dx \\ &+\int_{\mathbb{T}^d}\int_{\mathbb{R}} f^{\pm}(v_s,\xi)\varphi(x,\xi)\ d\xi dx \\ &= -\int_s^t\int_{\mathbb{T}^d} g(x,v)\varphi(x,v)\ dx d\beta(r) \\ &-\frac{1}{2}\int_s^t\int_{\mathbb{T}^d} g^2(x,v)\partial_\xi\varphi(x,v)\ dx dr. \end{aligned} \tag{3.3}$$

また, ある定数 $C = C(p, v_s, T)$ で,

$$\mathbb{E}\sup_{t\in[s,T)}\|v\|^p_{L^p(\mathbb{T}^d)} \le C \tag{3.4}$$

なるものが存在する. 一方, 方程式 (3.2) のキネティック解 w について次が成り立つ. 任意の $t \in [s,T)$, $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{T}^d\times\mathbb{R})$ に対して,

$$\begin{aligned} &-\int_{\mathbb{T}^d}\int_{\mathbb{R}} f^{\pm}(w(t),\xi)\varphi(x,\xi)\ d\xi dx \\ &+\int_{\mathbb{T}^d}\int_{\mathbb{R}} f^{\pm}(w_s,\xi)\varphi(x,\xi)\ d\xi dx \\ &+\int_s^t\int_{\mathbb{T}^d}\int_{\mathbb{R}} f^{\pm}(w,\xi)a(\xi)\cdot\nabla\varphi\ d\xi dx dr \\ &= \int_{\mathbb{T}^d\times[s,T)\times\mathbb{R}} \partial_\xi\varphi\ dm, \end{aligned} \tag{3.5}$$

ここで, m は w に関するキネティック測度である. また, 全ての $t \in [s,T)$, $p \in [1,\infty]$ に対して,

$$\|w(t)\|_{L^p(\mathbb{T}^d)} \le \|w_s\|_{L^p(\mathbb{T}^d)} \tag{3.6}$$

が成り立つ. さらに, 初期条件 $w_{s,1}$, $w_{s,2}$ に対する方程式 (3.2) のキネティック解を w_1, w_2 とするとき, 全ての $t \in [s,T)$ に対して,

$$\begin{aligned} &\|w_1(t) - w_2(t)\|_{L^1(\mathbb{T}^d)} \\ &\quad \le \|w_{s,1} - w_{s,2}\|_{L^1(\mathbb{T}^d)}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

が成り立つ.

本研究において, 近似解は時間分割法により構成される. 時間分割法とは与えられた時間の分割点により誘導される時間区間上で, 対象の方程式を二つに分けた方程式を交互に解き, それらを組み合わせることで近似解を構成する方法である. 時間区間の長さを小さくしたときに, 近似解は対象の方程式の解に収束することが期待される.

今, 時間分割点の列を次のように構成する: $\varepsilon > 0$, $t_0^\varepsilon = 0$, $\tilde{u}_0^\varepsilon = u_0$ とする. 各 $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ に対して, $t_n^\varepsilon < T$ であるならば,

$$t_{n+1}^\varepsilon = \inf\{t > t_n^\varepsilon;$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad\mathbb{E}\|S(t-t_n^\varepsilon)\tilde{u}_n^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon\| > \varepsilon\} \\
&\quad \wedge (t_n^\varepsilon + \varepsilon) \wedge T, \\
u_n^\varepsilon &= S(t_{n+1}^\varepsilon - t_n^\varepsilon)\tilde{u}_n^\varepsilon, \\
\tilde{u}_{n+1}^\varepsilon &= R(t_{n+1}^\varepsilon, t_n^\varepsilon)u_n^\varepsilon,
\end{aligned}
$$

$t_n^\varepsilon = T$ であるならば $t_{n+1}^\varepsilon = T$ と定義する. ここで, $a \wedge b = \min\{a, b\}$ とする. このとき, 近似解を次のように定義する: $t \in [t_n^\varepsilon, t_{n+1}^\varepsilon)$ に対して,

$$
\begin{aligned}
u^\varepsilon(t) &:= R(t, t_n^\varepsilon)u_n^\varepsilon, \\
\tilde{u}^\varepsilon(t) &:= S(t - t_n^\varepsilon)\tilde{u}_n^\varepsilon.
\end{aligned}
$$

$T^\varepsilon = \sup_{n \geq 1} t_n^\varepsilon$ とする. u^ε, $\tilde{u}^\varepsilon$ は明らかに, $[0, T^\varepsilon)$ 上で定義された関数である. u^ε, $\tilde{u}^\varepsilon$ が $[t_n^\varepsilon, t_{n+1}^\varepsilon)$ 上でそれぞれ満たす (3.3), (3.5) を上手く組み合わせることにより, 次を得る; 全ての $t \in [0, T^\varepsilon)$, $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R})$ に対して,

$$
\begin{aligned}
&- \int_{\mathbb{T}^d}\int_{\mathbb{R}} f^\pm(u^\varepsilon(t), \xi)\varphi(x, \xi)\ d\xi dx \\
&- \int_{\mathbb{T}^d}\int_{\mathbb{R}} f^\pm(\tilde{u}^\varepsilon(t), \xi)\varphi(x, \xi)\ d\xi dx \\
&+ \int_{\mathbb{T}^d}\int_{\mathbb{R}} f^\pm(u^\varepsilon(t^\varepsilon), \xi)\varphi(x, \xi)\ d\xi dx \\
&+ \int_{\mathbb{T}^d}\int_{\mathbb{R}} f^\pm(u_0, \xi)\varphi(x, \xi)\ d\xi dx \\
&+ \int_0^t\int_{\mathbb{T}^d}\int_{\mathbb{R}} f^\pm(\tilde{u}^\varepsilon(s), \xi)a(\xi)\cdot\nabla\varphi\ d\xi dx ds \\
&= - \int_0^t\int_{\mathbb{T}^d} g(x, u^\varepsilon)\varphi(x, u^\varepsilon)\ dx d\beta(s) \\
&- \frac{1}{2}\int_0^t\int_{\mathbb{T}^d} g^2(x, u^\varepsilon)\partial_\xi\varphi(x, u^\varepsilon)\ dx ds \\
&+ \int_{\mathbb{T}^d\times[0,t)\times\mathbb{R}} \partial_\xi\varphi\ dm^\varepsilon
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

が成り立つ. ここで, $t^\varepsilon = t_k^\varepsilon$ $(t \in [t_k^\varepsilon, t_{k+1}^\varepsilon))$, m^ε は $\tilde{u}^\varepsilon$ に関するキネティック測度とする. 本論文では証明は割愛するが, 上で構成した近似解 u^ε, $\tilde{u}^\varepsilon$ について, 次の結果が成り立つ.

命題 3.1. 各 $\varepsilon > 0$ について, ある自然数 $N = N(\varepsilon)$ で, $t_N^\varepsilon = T$ なるものが存在する.

定理 3.2. u^ε, $\tilde{u}^\varepsilon$ は $L^1(\mathbb{T}^d \times [0, T) \times \mathbb{R})$ でコーシー列であり, 共に同じ関数に収束する.

命題 3.1 の結果より, 近似解 u^ε, $\tilde{u}^\varepsilon$ は任意終点時刻 $T > 0$ まで可解である. 定理 3.2 より, (3.8) において $\varepsilon \downarrow 0$ なる極限を考えれば, (2.1) を得る. これより, u^ε の極限関数 u は方程式 (1.1) のキネティック解であることが分かる.

参考文献

[1] A. Debussche, J. Vovelle, *Scalar conservation laws with stochastic forcing*, J. Funct. Anal. 259 (4) (2010) 1014-1042.

[2] K. Kobayasi, D. Noboriguchi, *A time-splitting approach to quasilinear Degenerate Parabolic Stochastic Partial Differential Equations*, Differ. Integral Equ. 29 (2016), 1139-1166.