変形量子化されたケーラー多様体上のゲージ理論

佐古　彰史*　・　梅津　裕志**

Gauge theories on noncommutative Kähler manifolds

Akifumi SAKO　Hiroshi UMETSU

Abstract － This is a brief review of our recent research on deformation quantization of Kähler manifolds and construction of gauge theories on these spaces. We introduced twisted Fock representations of noncommutative Kähler manifolds and gave their explicit expressions. The twisted Fock representation is a representation of the Heisenberg like algebra whose states are constructed by applying creation operators to a vacuum state. Then we constructed a gauge theory on a noncommutative homogeneous Kähler manifold. A key point in this construction is to obtain vector fields which act as inner derivations for the deformation quantization.

Key words： noncommutative geometry, gauge field theory

１． 序論

重力の量子論を構成することは，素粒子論における重要な研究課題である．量子重力理論は時空の自由度を量子化することを意味するので，プランクスケールのようなミクロなスケールにおいて時空のある種の非可換性が現われると期待される．このような時空の非可換性の存在は，量子重力理論の有力な候補として考えられている超弦理論等において具体的に示されている．非可換空間上の場の理論は特有の物理的性質をもつことが知られている．その一つは非局所性である．非局所性は高エネルギースケールと低エネルギースケールが混合する量子論的現象（UV/IR mixing）として現れる．また非可換空間上のゲージ場の理論においては，空間的に広がった非局所的な物理量だけが観測可能量になる．これらは超弦理論や量子重力理論が持つ性質を反映したものである．もうひとつの特徴的な性質は，非可換ソリトンや非可換インスタントンの存在である．これらは非可換空間上の場の理論の非摂動的解析や非可換空間の微分位相幾何的性質の研究を行う上で重要である．

非可換空間を構成する方法はいくつか存在する．一つの方法は行列正則化を用いる方法である．行列正則化で現れる背景時空は行列の積の非可換性から，自然と非可換空間となる．行列正則化においては全ての自由度が有限サイズの行列によって記述できる利点があり，量子効果を解析する研究が盛んに行われた．非可換空間を記述するこの方法では空間の等長変換群の表現行列を用いるため，十分大きな等長変換群を持たない空間を非可換化することが困難である．もう一つの非可換空間の構成法は変形量子化である．これは全てのポアッソン多様体を非可換化できる非常に一般的な方法であるが，非可換な積（非可換積，スター積）を具体的な形で与えられる場合は限られている．更に，非可換空間上に場の理論を構成し，具体的に量子効果を解析できる例は非常に限られたものしか知られていない．

２． ケーラー多様体の変形量子化

ケーラー多様体上に非可換積を定義する方法として，Karabegovによって提案されたものがある．この方法において非可換積は無限個の連立偏微分方程式系の解として定義される．論文[1]で我々は任意次元の複素射影空間と複素双曲空間の場合に系統的に微分方程式を解き，非可換積の表式を具体的に与え，関数の間の代数を調べた．非可換パラメー

*　東京理科大学理学部
** 釧路高専創造工学科

タが特殊な値をとる場合には，有限個の基底関数で代数が閉じる，つまり有限次元表示が得られることを示した．また，この手法で得られたケーラー多様体の非可換変形が，Fedosov流の変形量子化や行列正則化で得られたものと等価であることを具体的に示した．

論文[2]では，変形量子化された一般のケーラー多様体上のフォック表示について系統的に調べた．まず，フォック表示とトレースが局所的に構成した．つまり，局所座標系に対応して非可換積を定義し，その上の真空とそれに作用する生成消滅演算子を導入した．各生成消滅演算子とケーラー多様体上の関数の対応を具体的に与えた．ここで構成したフォック表示の特徴的な点の一つとして，演算子のエルミート共役と関数の複素共役が異なり，非自明に捻られていることがある．次に，局所的に定義されたフォック表示とトレースの空間全体への張りあわせについて議論した．フォック表示とトレースを大局的に定義できることが，次節で述べるゲージ理論を構成する上で重要な役割を果たす．

３． 変形量子化された等質ケーラー多様体上のゲージ理論

論文[3]において，変形量子化された等質ケーラー多様体上でゲージ理論の構成を行なった．

一般の非可換空間上では場の運動項が無限階の微分まで含むために，物理的解釈をする上で困難が生じる．我々は，等質ケーラー多様体の場合にはキリングベクトルに対応したキリングポテンシャルを用いて場の運動項を定義することによって，運動項が場の２階微分になることを示した．ゲージ場とゲージ変換を非可換パラメータの形式的べき級数として一般化し，変形されたゲージ対称性を導入した．これらを用いて変形量子化された等質ケーラー多様体上にゲージ理論を構成し，場のゲージ変換の下での変換性を調べ，ゲージ不変な作用の構成を行なった．この際に，変形量子化されたケーラー多様体上の非可換積と空間積分（トレース）の下で場の巡回対称性が成り立つことを証明した．これは作用のゲージ不変性を示す上で重要である．

論文[4] において，複素１次元，２次元の場合に，具体的にゲージ理論の作用を構成し，作用の最小値を与える場の配位を与える方程式とその解について調べた．これは，通常の可換な空間における BPS 方程式とその解に対応している．非可換空間の場合には非可換積によって関数の代数が変形され，また複素射影空間の場合には空間が曲がっている効果で, BPS 方程式に類似した条件式を探すことは非自明である．この研究は今後の発展が期待される部分を多く残している．

４． まとめと今後の課題

Karabegovによるケーラー多様体の変形量子化の方法を用いて，非可換空間のフォック表示を具体的に構成した．等質ケーラー多様体の場合にはキリングポテンシャルを用いて，物理的に解釈可能な場の運動項を定義できることを示した．非可換パラメータによって変形されたゲージ対称性を導入し，その変換の下で不変なゲージ場の作用を構成した．

今後は非可換ケーラー多様体上のゲージ理論の古典解や量子効果を研究し，量子重力理論における非可換性の効果について新しい知見を得ることが課題である．

５． 謝辞

本研究の一部はJSPS科研費 16K05333の助成を受けたものである．

参考文献

[1] A. Sako, T. Suzuki and H. Umetsu, “Explicit Formulas for Noncommutative Deformations of CP^N and CH^N,” J. Math. Phys. **53**, 073502 (2012)

[2] A. Sako and H. Umetsu, “Twisted Fock representations of noncommutative Kähler manifolds,” J. Math. Phys. **57**, no. 9, 093501 (2016)

[3] Y. Maeda, A. Sako, T. Suzuki and H. Umetsu, “Gauge theories in noncommutative homogeneous Kähler manifolds,” J. Math. Phys. **55**, no. 9, 092301 (2014)

[4] A. Sako, T. Suzuki and H. Umetsu, “Gauge theories on noncommutative CPN and Bogomol’nyi-Prasad-Sommerfield-like equations,” J. Math. Phys. **56**, no. 11, 113506 (2015)