

『ふしぎの国のアリス』を使用した、分数の割り算の説明。 また $(-)\times(-)=(+)$ の経済学的説明。

瀧川 貴利

The An explanation of division of fractions by using the image of “*Alice’s Adventures in Wonderland.*” An economic explanation of “multiplying a negative by a negative is a positive”

Takatoshi Takikawa

Abstract - Some people have troubles in understanding the division of fractions. However, they can easily understand it by using the image of “*Alice’s Adventures in Wonderland.*” For example by $1/3$ means by a $1/3$ -sized Alice. For her, a regular pizza looks like a triple size pizza. In this way people can understand reciprocal easily.

Others have trouble in understanding multiplying a negative by a negative is a positive. Gerolamo Cardano, a famous mathematician in Italy doubted it. People can also understand it when they realize the first negative means the change of the direction. Therefore “multiplying a negative by a negative is a positive” means people can earn more awards points when they buy more.

Key words: division of fraction, *Alice’s Adventures in Wonderland*, reciprocal, multiplying a negative by a negative is a positive

問題の所在について

分数の割り算をする場合、なぜ逆数を使うのかわからないという悩みがあげられる。このことが数学嫌いの原因の一つといわれている。例えばジブリの「おもひでぽろぽろ」の主人公の岡島タエ子は、分数の割り算が苦手という設定である。また銀林浩・榊忠男の『数は生きている』の登場人物の三郎は、分数の割り算が苦手という設定になっている。分数の割り算に対し、「分数で割るのになぜひっくり返してかけるのかという問題は、決してやさしいことではない。」と書いてある。銀林はタイルを使った解法を提示しているが、タイルがなぜ突然でてくるのかが非常にわかりにくい。

この論文ではルイス・キャロルの『ふしぎの国のアリス』を用いて、誰にでも直感的に分数の割り算を理解できる解法を提示している。

さらに借金 \times 借金=財産の問題についても、イメージを使った経済学的な解決方法を示している。

1. ふしぎの国のアリス理論

割り算は、例えば6個のリンゴを3人で分けた場合 $6\div 3=2$ となる。同様に $6\div 1/3=18$ となる。しかし $1/3$ 人という概念が、学生にとって今までわかりにくいとされてきた。

しかしこの $1/3$ 人という概念は、実は『ふしぎの国のアリス』の中には存在する。『ふしぎの国のアリス』とは、ルイス・キャロルによって書かれた童話である。ルイス・キャロルの本名は、チャールズ・ラトウィジ・ドジスン(Charles Lutwidge Dodgson)といい、オックスフォード(Oxford)大学の数学の教授である。チャールズ・ラトウィジ・ドジスは、『鏡の国のアリス』も書いている。『ふしぎの国のアリス』とは、アリスがウサギ穴から落ちていき、白ウサギ(the White Rabbit), チェシャ・ネコ(Cheshire Cat), 三月ウサギ(the March Hare), ぼうし屋(the Mad Hatter), ハートの女王(the Queen of Hearts)などさまざまな人物に会い、後はアリスが夢から目覚めるところで終わる物語である。

ここで不思議の国のアリスの内容について確認してみたい。原文ではインチやフット(フィート)などの単位が使われている。1 inchとは、1 foot (30.48センチメートル)の12分の1の長さ(2.54cm)である。

アリスは第1章で「わたしをお飲み」(DRINK ME)と書かれた小さなビンをのみ、身長が25.4センチ(only ten inches)に縮む。さらにガラスのボックスのなかにあった「わたしをおたべ」(EAT ME)と書かれた小さなケーキを食べて、第2章で身長が2メートル76.32センチ超(more than nine feet high)になった。その後アリスは白ウサギの扇(the fan)を手を持ち、手袋(one of the Rabbit's little white kid gloves)をはめた。扇を手放すまで、約60.96センチ(about two feet high)にまで背が縮んだ。

第4章でアリスは小さなビンをのみ、白ウサギの1000倍の大きさになる。その後、お菓子を1つ飲み込んで、7.62センチ(three inches high)に縮んだ。

第5章ではイモムシ(the Caterpillar)が「片っかわは大きくなる。もう片っかわは小さくなる。」(‘One side will make you grow taller, and the other side will make you grow shorter’)アリスが「なんの片側かしら。なんのもう片側かしら」と心の中で考えるとイモムシは「キノコ(mushroom)のだよ」と答えた。そしてアリスは両手でそれぞれのふちを少しずつもぎ取った。まず右手のキノコ(the right-hand bit)を食べてみてあごが足にびったりと押しつけられるほど背が縮み、左手のキノコ(the left-hand bit)を一口飲みこむと森で一番高い木より背が高くなった。キノコを用心深く食べ続け、普段の背の高さに戻った。その後公爵夫人の家に入るときに、右手のキノコをすこしずつかじって22.86センチ(nine inches high)になった。

第6章では三月ウサギの家に行くために、左手のキノコをすこしかじって約60.96センチ(about two feet high)になった。第7章で三月ウサギの家を出る際に、キノコをかじって30.48センチになった。その後法廷でアリスは大きくなり続け、最終的には普段の背丈になった。

つまりこの「ふしぎの国のアリス」では、何かを

食べたり、飲んだり、あるいは扇子に触ったりすると、アリスの身体の色が変わる。このことが分数の割り算の理解につながるのである。例えば1/3とは、アリスの身長が1/3になることと同じと考えられる。本文では第1章で三本足のテーブルが、小さくなったアリスには巨大化して見えた記述がある。このようなアリスにとって、もし1枚のピザがあったとしたら、とても大きくなっているようにみえるだろう。1枚のピザ自体は同じであるが、1/3サイズのアリスにとって、今までのピザがあたかも3倍の大きさになったように見える。このことは逆にアリスがもし変わらなかったとした場合、ピザの大きさが3倍になることを意味する。このことの例から分数の割り算をする場合、分母と分子を逆にすることが理解できる。

例

$6 \div 3 = 2$ (アリス 三月ウサギ ぼうし屋)

6つのピザを3人で割ると、1人につき2つのピザになる。

一方

$$6 \div 1/3 = 18$$

6つのピザを1/3のサイズのアリスで割る。1/3サイズのアリスは食べる量が1/3に減っていると仮定し、18となる。ここでポイントなのはピザ6枚という数は変わっていないが、アリスから見ると3倍に増えているように見えることである。

『ふしぎの国のアリス』は子供にも容易に理解できるので、小学生にもわかりやすい例となる。この例は『ふしぎの国のアリス』だけにとどまらず、『ガリヴァー旅行記』のリリパット国やプロブディンナグ国にもみられる。(1726年の初版では著者がレミュエル・ガリバー、船医、のち数隻の船の船長) 著作は『世界の遠く離れた国への旅行記四篇』になっている)。また漫画にも散見される。例えば『ドラえもん』の漫画には、スモールライト、ビッグライト、ガリバートンネル、いっすんぼうしなどといったひみつ道具がある。こ

これらのひみつ道具の効果は、不思議の国のアリスの考えと基本的には同一である。このため学生や生徒の興味を引くために、ドラえもののひみつ道具を使って説明することもできる。例えばスモールライトを使うと、分数の乗法にも使える。1/3のピザをスモールライトで1/2倍にするなどである。対象者に合わせて、自由に題材を選ぶことができる。

また空想上の問題だけでなく、現実的な問題としても存在する。子供は大人に比べて体が小さいので、食事量や薬を飲む量が大人の1/2, 1/3というのも考えられる。例えば大人は1日1錠, 子供1/2錠という薬が存在する。もし薬が3錠ある場合、1人の大人、1人の子供がいた場合何日分持つかなどが考えられる。

$$3 \div (1+1/2)=2$$

答えは2日になる。

さらに算数における分数と小数の問題として、以下の問題を考えられる。小麦が33kgある。大人は1日につき1kg, 高校生は1/2kg食べるとすると、何日分になるか。

$$33 \div (1+1/2)=22 \text{ となり, } 22 \text{ 日分.}$$

同じ問題を小数で考える場合、小麦が33kgある。大人は1日につき1kg, 高校生は0.5kg食べるとすると

$$33 \div (1+0.5)=22$$

同じ22日となる。

さらに中学生が大人の1/3食べると仮定した場合、小数では書けないが、分数なら計算できる。

小麦が33kgある。大人は1日につき1kg, 高校生は1/2kg, 中学生1/3kg食べるとするとどうなるかなどの問題にも応用できる。

$$\text{式にすると、} 33 \div (1+1/2+1/3) = 18$$

答えは18日となる。

なお1/3は0.3333...と表され、1/3を3倍すると1となるが、0.3333...を3倍すると0.999...となるのはなぜかという問題があるが、これは表記の問題である。1/4は0.25である。これを4倍すると1となる。同様に1/3を3倍すると0.999...ではなく1であると理解すべきである。

2. 借金×借金=財産について

インドのバスカラは「財産と財産の積、借金と借金の積は財産であり、財産と借金の積は借金である。」しかし借金×借金=財産は、バスカラも疑問だったらしい。

またフランスの作家スタンダールは「マイナスの量のある人の借金と考えたとき、1万フランの借金に500フランの借金をかけ、それがどうして500万フランの財産を持つようになるのか。」という疑問を自叙伝の中に書いてある。

またイタリアのカルダノは、「(マイナス)×(マイナス)=プラス」という規則は間違いだといったそうである。このカルダノは三次方程式の解の公式や確率論などで知られる。

(-)×(-)を借金×借金=資産とするのは実は式の解釈が間違っている。つまり(-)×(-)を両方ともマイナスを借金ととらえているところに問題がある。実際には(-)×(-)は違う現象を意味している。以下で正の数それぞれ(+), 0, (-)をかけた場合は以下ようになる。

財産が増加する(例えば5倍に増える)場合

5×財産

預金をゼロにする場合(財産税を100%かけて預金をゼロにする場合や預金を封鎖してすべて没収する場合) 財産税とは、資産にかける税のことである。

0×財産=0となる

マイナスとは、財産を減らす方向に働くと考えることができる。具体例として、上記の財産税などがある。例えば預金額xに対して60%の財産税をかけた場合、

$$-0.6 \times x = -0.6x$$

預金の全体の額は、 $x - 0.6x = 0.4x$ に減少する

税を考えると、 $(-) \times \text{財産} = (-)$ となる

これにならって負の計算を試みる。

借金が雪だるま式（例えば5倍）になる場合は、

$5 \times \text{借金}$ となる

つまり借金 \times 借金でイメージされているのは、借金が積み重なることを意味している。このため数式で表すと $(-)+(-)=(+) \times (-)$ のことであり、実は $(-) \times (-)$ （ではない）。

借金を帳消しにする政策（1297年の永仁の徳政令やデフォルト（債務不履行））などの場合、

$$0 \times (\text{借金}) = 0 \text{となる}$$

$$(-) \times (\text{借金}) = +$$

一方借金の場合、財産税と反対の効果をイメージすればよい。徳政令の場合、借金がゼロになるということを考えて、マイナスをかけるとは借金に対しお金をあげることの意味する。すなわち税で借金を補填する意味（あるいはお金を使った分だけポイントで還元をする場合になる。）

借金を税を60%補填する場合

$$-0.6 \times (-x) = 0.6x \text{となる.}$$

つまり預金額全体では

$-x + 0.6x = -0.4x$ となる。つまり借金の額が60%だけ減少することになる。

$-500 \times (-10000) = 5000000$ とは、1万フランの借金を税金を補填した場合となる。（フランス中央銀行が借金の数の500倍の数を補填）このため500万フランとなる。

つまり $(-y) \times (-)$ とは、ある借金に対してその y 倍を返すという意味にとらえることができる。具体的には客の買った部分を y 倍にしてポイント還元をすることや、日本政府や日本銀行が補填す

ることなどが考えられる。

3. 結論

以上の結果を通して、「ふしぎの国のアリス」のイメージを使うと、簡単に分数の割り算を理解できる。今まで1/3の人は存在しないとされてきたが、1/3サイズになったアリスを想像してみればよいのである。このようなアリスにとって、もし1枚のピザがあったとしたら、とても大きくなっているようにみえるだろう。1枚のピザ自体は同じである。しかし1/3サイズのアリスにとって、今までのピザが、あたかもピザが3倍の大きさになったように見える。このことは逆にアリスがもし変わらなかったとした場合、ピザの大きさだけが3倍になることを意味する。このことの例から分数の割り算をする場合分母と分子を逆にすることが理解できる。これにより、数の割り算と逆数の掛け算の関係が誰にでも明確になると思われる。

また借金 \times 借金=財産について、最初の符号を税（補助金、ポイント還元）などのように考えれば簡単に解ける。つまり財産の意味が変わるという符号である。例えば借金の数だけ、日本銀行が x 倍にして補填をするという風な意味である。借金 \times 借金でイメージされる式は、数学的には（正の数） \times 借金である。このことがマイナス同士の掛け算を混乱させる原因となっている。

引用・参考文献

銀林浩・榊忠男(1974)『数は生きている』岩波科学の本

小藤俊幸「ヨーロッパの数学教育による負数の受容」南山大学紀要

ルイス・キャロル(1971)『ふしぎの国のアリス』福音館書店

Lewis Carroll, *Alice's Adventures in Wonderland*, Puffin Books, 2014

ルイス・キャロル(1972)『鏡の国のアリス』福音館書店

Lewis Carroll, *Through the looking-glass*, Puffin Books, 2015

ジョナサン・スウィフト(1988)『ガリヴァー旅行記』福音館書店

Jonathan Swift, *Gulliver's Travels*, Puffin Books, 2016